Logique et Raisonnement

Exercice 1 : Soit f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

1. Il existe $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$.
2. Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) > 0$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}$ tels que $x < y$ et $f(x) \leqslant f(y)$.

Exercice 2 :

1. P et non Q.
2. non P ou Q ce qui est la même chose que P $\Rightarrow$ Q.
3. non P et (non Q ou non R) (ici les parenthèses sont importantes).
4. P et Q et R et non S.

Exercice 3 : Supposons que $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ et montrons $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

Si $\mathrm{A} \neq \mathrm{B}$ alors il existe un élément $x \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$ ou un élément $x \in \mathrm{B} \setminus \mathrm{A}$.

Quitte à échanger A et B, on peut supposer qu'il existe $x \in \mathrm{A} \setminus \mathrm{B}$.

Mais alors $x \in \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ et $x \notin \mathrm{A} \cap \mathrm{B}$.

Donc $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \mathrm{A} \cup \mathrm{B}$.

La contraposée donne le résultat escompté.

Exercice 4 : Montrons, par récurrence, que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n-1) \times n = \frac{1}{3}n(n-1)(n+1). \tag{I.1}$$

On pose $\mathrm{S}_n = 1 \times 2 + 2 \times 3 + \ldots + (n-1) \times n$.

Pour $n = 0$, on a $\mathrm{S}_0 = 0$ et $\dfrac{1}{3} \times 0 \times (-1) \times 1 = 0$ donc la propriété est initialisée.

Supposons qu'il existe un entier k non nul tel que $\mathrm{S}_k = \dfrac{1}{3}k(k-1)(k+1)$.

On a :

$$\mathrm{S}_{k+1} = \mathrm{S}_k + k(k+1)$$

Par hypothèse de récurrence,

$$= \frac{1}{3}k(k-1)(k+1) + k(k+1)$$

En factorisant,

$$= k(k+1)\left(\frac{1}{3}(k-1) + 1\right) = \frac{1}{3}k(k+1)(k+2).$$

La propriété est donc vraie [1] au rang $k+1$. Elle est héréditaire.

Étant initialisée pour $n = 0$ et héréditaire, la propriété (I.2) est donc vraie pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5 :

1. — Pour tout réel y, $y = y$ donc $\mathcal{R}$ est réflexive.
   — Par symétrie de l'égalité dans $\mathbb{R}$, pour tous réels y et y', $y = y' \iff y' = y$ donc $\mathcal{R}$ est symétrique.
   — Enfin, soient trois couples de réels $(x;\ y)$, $(x';\ y')$ et $(x";\ y")$ tels que $(x;\ y)\,\mathcal{R}\,(x';\ y')$ et $(x';\ y')\,\mathcal{R}\,(x";\ y")$ *i.e.* $y = y'$ et $y' = y"$.
   Par transitivité de l'égalité dans $\mathbb{R}$, on a $y = y"$ *i.e.* $(x;\ y)\,\mathcal{R}\,(x";\ y")$.
   La relation $\mathcal{R}$ est donc transitive.

   Comme la relation $\mathcal{R}$ est réflexive, symétrique et transitive sur $\mathbb{R}^2$, elle y définit une relation d'équivalence.
2. Par définition, deux points $\mathrm{M}\,(x;\ y)$ et $\mathrm{M}'\,(x';\ y')$ sont en relation si, et seulement si ils ont la même ordonnée.
   Les classes d'équivalence de $\mathcal{R}$ sont donc tous les couples $(x;\ y)$ de même ordonnée *i.e.* les points de la droite d'équation $y = k$ pour $k \in \mathbb{R}$.

Exercice 6 : On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{3x-1}{x-2}$.

1. $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{2\} =]-\infty\,;2[\cup]2\,;+\infty[$.
2. Soit $y \in \mathbb{R}$. Cherchons, s'il existe, un antécédent possible de y [2] dans $\mathcal{D}_f$.
   $$\frac{3x-1}{x-2} = y \iff 3 + \frac{5}{x-2} = y \iff \frac{5}{x-2} = y - 3$$
   Si $y \neq 3$, alors
   $$x - 2 = \frac{5}{y-3} \iff x = \frac{2y-1}{y-3}.$$
   Tous les réels différents de 3 ont donc un antécédent *i.e.* $\mathrm{A} = \mathbb{R}\setminus\{3\} =]-\infty\,;3[\cup]3\,;+\infty[$.
   Il est même uniquement déterminé dans $\mathcal{D}_f$.
3. D'après la question précédente, tous les réels de A ont un unique antécédent dans $\mathcal{D}_f$.
   La fonction f établit donc une bijection entre $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ et $\mathbb{R} \setminus \{3\}$.

[1]. sous l'hypothèse qu'elle soit vraie au rang k !
[2]. On fait ici un raisonnement par analyse-synthèse.