Fonctions usuelles - Bac C 1993

On désigne par f la fonction numérique définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}.$$

On se propose d'étudier la fonction f puis, dans la deuxième partie, deux suites numériques liées à f.

On appelle $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormal $(\mathrm{O}; \overrightarrow{\imath}; \overrightarrow{\jmath})$ (unité graphique : 1 cm).

Partie A

Étude et courbe représentative de f

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$. On précisera les asymptotes à la courbe.
   (b) Étudier le sens de variation de f.
   (c) Dresser le tableau de variation de f.
   (d) Tracer la courbe $\mathscr{C}_f$ et ses asymptotes.
2. On désigne par (T) la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1.
   (a) Déterminer une équation de (T).
   (b) On désigne par g la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

   $$g(x) = (x-1) - f(x).$$

   Calculer $g'(x)$ et vérifier que $g'(x) = \dfrac{1}{2x\sqrt{x}}\Big[\ln x + 2(x\sqrt{x}-1)\Big]$.
   (c) Calculer $g'(1)$ et étudier le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]0\,;1[$ et $]1\,;+\infty[$.
   (d) Calculer $g(1)$ et, à l'aide du sens de variation de g, étudier le signe de $g(x)$.
   En déduire la position de la courbe (C) par rapport à la droite (T).

Partie B

Étude de suites

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 8, on pose :

$$u_n = f(8) + f(9) + \ldots + f(n) = \sum_{k=8}^{n} f(k).$$

On rappelle que, la fonction f étant continue sur $]0\,;+\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ existe quels que soient les nombres a et b strictement positifs.

1. (a) Soit k un entier supérieur ou égal à 8. Démontrer que :

   $$f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k).$$

   (b) En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 8$,

   $$u_{n+1} - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$

   (c) À l'aide d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I}_n = \displaystyle\int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.
   (d) Déduire des questions (1b) et (1c) que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.
2. Pour tout entier n supérieur ou égal à 8, on pose :

   $$v_n = u_n - \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et en déduire que :

   $$u_n - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$

   puis que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée.
   (b) En utilisant la question 1. a., démontrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   (c) Justifier que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et démontrer que sa limite ℓ vérifie :

   $$0 \leqslant \ell \leqslant 0,74.$$