Fonctions usuelles - Bac C 1993

Partie A

1. (a) D'après les théorèmes sur les produits de limites,

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \ln x \times \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = -\infty.$$

La courbe représentative de f admet donc l'axe des ordonnées comme asymptote.

D'après le cours de terminale, on sait que $\lim\limits_{u\to+\infty} \dfrac{\ln u}{u} = 0$ d'où

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \underset{u=\sqrt{x}}{=} \lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u^2}{u} = 2\lim_{u\to+\infty} \frac{\ln u}{u} = 0.$$

La courbe admet aussi l'axe des abscisses comme asymptote en $+\infty$.

(b) Comme quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul, la fonction f est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ f'(x) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{x}} - \dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}},$$

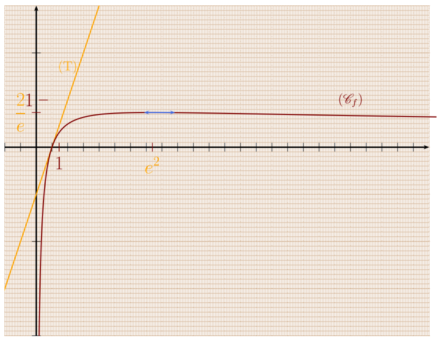
$f'(x)$ est donc du signe de $2-\ln x$ sur $]0\,;+\infty[$.

La fonction f est donc croissante sur $]0\,;e^2]$ puis décroissante sur $[e^2\,;+\infty[$.

(c) D'après les questions précédentes, on a :

x	0		e^2		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
f	‖ $-\infty$	↗	$\frac{2}{e}$	↘	0

(d)



2. (a) L'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est donnée par :

$$(\mathrm{T}):\ y = f'(a)(x-a) + f(a).$$

Comme $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$, on obtient :

$$(\mathrm{T}):\ y = x - 1.$$

(b) Comme somme de fonctions dérivables sur $]0\,;+\infty[$, la fonction g est dérivable est on a :

$$\forall x \in]0\,;+\infty[,\ g'x) = 1 - f'(x) = 1 - \frac{2-\ln x}{2x\sqrt{x}} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\big(2x\sqrt{x} - 2 + \ln x\big) = \frac{1}{2x\sqrt{x}}\Big(\ln x + 2(x\sqrt{x}-1)\Big).$$

(c) D'après la question précédente, on a $g'(1) = 0$.

Comme $x\sqrt{x}$ est positif sur $]0\,;+\infty[$, le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $\ln x + 2(x\sqrt{x}-1)$.

Pour tout x de $]1\,;+\infty[$, on a $\ln x > 0$ et $0 < 1 < x \implies 1 < \sqrt{x}$ par croissance de la fonction $\sqrt{\ }$ puis $1 < x\sqrt{x}$ par produit d'inégalités strictement positives.

Enfin, comme $\ln x$ et $x\sqrt{x}-1$ sont toutes deux strictement positives, leur somme l'est aussi et on a $\ln x + 2(x\sqrt{x}-1) > 0$ sur $]1\,;+\infty[$.

Le raisonnement est identique sur $]0\,;1[$ et conduit à l'inégalité stricte contraire.

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	

(d) On a $g(1) = 0$ et, d'après la question précédente, le tableau de variation de g s'écrit :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖	↘	0	↗	

Pour tout x de $]0\,;+\infty[$, on a donc $g(x) \geqslant 0 \iff x - 1 \geqslant f(x)$. La courbe $\mathscr{C}_f$ est donc au-dessous de sa tangente (T).

Partie B

1. (a) Comme $e^2 < 8$, pour tout k entier supérieur ou égal à 8, f est décroissante sur l'intervalle $[k\,;k+1]$ et pour pour t de cet intervalle on a :

$$k \leqslant t \leqslant k+1 \implies f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k).$$

D'après les inégalités de la moyenne, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}t &\leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}t \\ f(k+1)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t &\leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k)\int_k^{k+1} \mathrm{d}t \\ f(k+1) &\leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k). \end{aligned}$$

(b) Sommons toutes ces inégalités pour k variant de 8 à un entier n, on obtient :

$$\sum_{k=8}^{n} f(k+1) \leqslant \sum_{k=8}^{n}\int_k^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=8}^{n} f(k)$$

d'après la relation de Chasles pour les intégrales,

$$u_{n+1} - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$

(c) À l'aide d'une intégration par parties, on trouve :

$$\begin{aligned} \mathrm{I}_n &= \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_8^{n+1} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t = \Big[2\sqrt{t}\ln t\Big]_8^{n+1} - \int_8^{n+1}\frac{2}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \\ &= \Big[2\sqrt{t}\ln t - 4\sqrt{t}\Big]_8^{n+1} = \Big[2\sqrt{t}\Big(\ln t - 2\Big)\Big]_8^{n+1} \\ &= 2\sqrt{n+1}\Big(\ln(n+1)-2\Big) - 2\sqrt{8}\Big(\ln(8)-2\Big). \end{aligned}$$

(d) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt{n+1}\ln(n+1) = +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{I}_n = +\infty$.
D'après les théorèmes sur les comparaisons de suites, de la dernière inégalité précédente, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est minorée par une suite divergente vers $+\infty$ donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$ quand n tend vers $+\infty$.

2. (a) Sur $[8\,;+\infty[$, la fonction f prend des valeurs strictement positives donc, pour tout entier n supérieur ou égal à 8, $u_{n+1} - u_n = f(n+1) > 0$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante.
En particulier, comme $u_n \leqslant u_{n+1}$, on obtient de l'inégalité de 1.(b) :

$$u_n - f(8) \leqslant u_{n+1} - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$

i.e.

$$u_n - f(8) \leqslant \int_8^{n+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_n.$$

Le premier membre de cette inégalité permet d'écrire $v_n \leqslant f(8)$ et le second $0 \leqslant v_n$.
La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bornée.

(b) Par définition de $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ on a :

$$\begin{aligned} v_{n+1} - v_n &= u_{n+1} - u_n - \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \\ &= f(n+1) - \int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Or, d'après 1.a, $\displaystyle\int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(n+1)$.

Donc $v_{n+1} - v_n = f(n+1) - \displaystyle\int_{n+1}^{n+2} f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant f(n+1) - f(n+1) = 0$, la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

(c) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée *i.e.* convergente.
Par passage à la limite des inégalités du 2.a, sa limite, ℓ, est telle que :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \ell \leqslant f(8) \simeq 0,735 \\ 0 &\leqslant \ell \leqslant 0,74. \end{aligned}$$