Une petite fonction

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

On note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f.

1. Déterminer $\mathcal{D}_f$, le domaine de définition de f.
2. Déterminer les limites de f aux bornes de $\mathcal{D}_f$. En déduire les asymptotes éventuelles.
3. Montrer que la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y = x+2$ est asymptote oblique à la courbe en $+\infty$.
4. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et calculer, pour tout $x \in \mathcal{D}_f$, $f'(x)$.
5. (a) Montrer que f admet deux points critiques *i.e.* qu'il existe deux réels α et β, $\alpha < \beta$ tels que $f'(\alpha) = f'(\beta) = 0$.
   (b) Montrer que $f(\alpha)$ et $f(\beta)$ peuvent se mettre sous la forme $a + b\sqrt{3}$ où a et b sont des entiers relatifs.
6. Déterminer le tableau de variations complet de f.
7. La fonction f admet-elle des extrema locaux ? globaux ? Si oui, les préciser.
8. Montrer que le point d'intersection des asymptotes est centre de symétrie de $\mathscr{C}_f$
9. Sans justification, donner les images directes suivantes :

   (a) $f\Big([\beta\,;+\infty[\Big)$ (b) $f\Big(]1\,;+\infty[\Big)$ (c) $f\Big([0\,;3]\setminus\{1\}\Big)$ (d) $f\Big(\mathcal{D}_f\Big)$

10. De même, déterminer les images réciproques suivantes :

   (a) $f^{-1}\Big(\mathbb{R}\Big)$ (b) $f^{-1}\Big([f(\beta)\,;+\infty[\Big)$ (c) $f^{-1}\Big([0\,;3]\Big)$ (d) $f^{-1}\Big(\{7\}\Big)$

   Soient $\mathrm{I} = \Big[1+\sqrt{3}\,;+\infty\Big[$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & f(x) \end{array}$ la restriction de f à I.

11. Justifier que g définit une bijection de I dans J, où J est un intervalle que l'on précisera. On note $h = g^{-1}$ la fonction réciproque de g.
12. Déterminer le domaine de dérivabilité de h. Comment se comporte le graphe de h en $3+2\sqrt{3}$?
13. (a) Montrer que pour tout $y \in \mathrm{J}$, on a $y^2 - 6y - 3 \geqslant 0$.
   (b) Montrer que pour tout $y \in \mathrm{J}$, on a :
   $$\frac{y-1-\sqrt{y^2-6y-3}}{2} \leqslant 1+\sqrt{3}.$$
   (c) En déduire pour tout $y \in \mathrm{J}$, l'expression de $h(y)$.
14. (a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x^2} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{\sqrt{x}} = +\infty$.
   (b) Que peut-on en déduire pour l'allure de $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$?