Une petite fonction

On considère la fonction $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

On note $\mathscr{C}_f$ le graphe de f.

1. Comme le numérateur de f ne s'annule pas en 1, $\boxed{\mathcal{D}_f =]-\infty\,;1[\cup]1\,;+\infty[}$.
2. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, on a :
$$f(x) = \frac{\cancel{x}\left(x+1+\dfrac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)} = \frac{x+1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}.$$
D'après les théorèmes sur les limites de sommes et de quotients, on en déduit que :
$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty}.$$
Au voisinage de 1, $x^2+x+1>0$, la limite est donc donnée par $\dfrac{1}{x-1}$ et on a :
$$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-}\frac{1}{x-1} = \lim_{u\to0^-}\frac{1}{u} = -\infty \quad\text{et}\quad \lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+}\frac{1}{x-1} = \lim_{u\to0^+}\frac{1}{u} = +\infty.$$
La courbe de f admet donc la droite d'équation $\boxed{x=1}$ comme asymptote.
3. Pour tout x de $\mathcal{D}_f$, on a :
$$f(x)-(x+2) = \frac{x^2+x+1-(x+2)(x-1)}{x-1} = \frac{3}{x-1}.$$
Comme $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = (x+2) = \lim_{x\to\pm\infty}\dfrac{3}{x-1} = 0$, la droite d'équation $\boxed{y=x+2}$ est donc asymptote (oblique) à $\mathscr{C}_f$ en $+\infty$ et $-\infty$ (même si non demandé).
4. Sur $\mathcal{D}_f$, la fonction f est un quotient de fonctions dérivables de dénominateur non nul donc dérivable et on a :
$$\forall x\in\mathcal{D}_f,\quad \boxed{f'(x) = \frac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}}.$$
5. (a) D'après la question précédente, il suffit de factoriser le numérateur de f', trinôme de discriminant $\Delta = 4+8 = 12 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 > 0$.

   La dérivée de f s'annule donc deux fois en deux points critiques $\alpha = \dfrac{\cancel{2}-\cancel{2}\sqrt{3}}{\cancel{2}} = \boxed{1-\sqrt{3}} < 1$ et $\boxed{\beta = 1+\sqrt{3}} > 1$.

   (b) En n'oubliant pas que $\alpha^2-2\alpha-2=0$ *i.e.* $\alpha^2 = 2\alpha+2$, on a :
$$f(\alpha) = \frac{\alpha^2+\alpha+1}{\alpha-1} = \frac{3\alpha+3}{-\sqrt{3}} = \frac{3(\alpha+1)}{-\sqrt{3}} = -\sqrt{3}\,(\alpha+1) = -\sqrt{3}\left(2-\sqrt{3}\right) = \boxed{3-2\sqrt{3}} < 0.$$
   Et,
$$f(\beta) = \frac{\beta^2+\beta+1}{\beta-1} = \frac{3\beta+3}{\sqrt{3}} = \frac{3(\beta+1)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}\,(\beta+1) = \sqrt{3}\left(2+\sqrt{3}\right) = \boxed{3+2\sqrt{3}} > 0.$$
6. D'après les questions précédentes, on a :

x	$-\infty$		$\alpha = 1-\sqrt{3}$		1		$\beta = 1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$f(\alpha) = 3-2\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\infty$ ‖ $+\infty$	$\searrow$	$f(\beta) = 3+2\sqrt{3}$	$\nearrow$	$+\infty$

7. La fonction f n'est pas bornée donc elle ne peut admettre d'extrema globaux.

   Cependant, en $\boxed{\alpha}$ et $\boxed{\beta}$, la dérivée de f s'annule **et** change de signe donc la fonction f y admet des extrema locaux, respectivement un $\boxed{\text{maximum}}$ et un $\boxed{\text{minimum}}$.
8. Les deux asymptotes de $\mathscr{C}_f$ se coupent en $\boxed{\Omega\,(1;\,3)}$.

   Comme $\mathcal{D}_f$ est symétrique par rapport à 1, $1-x\in\mathcal{D}_f \iff 1+x\in\mathcal{D}_f$.
   Pour tout $x\in\mathbb{R}^*$ *i.e.* $1+x\in\mathcal{D}_f$, on a :
$$\begin{aligned} f(1+x)+f(1-x) &= \frac{(1+x)^2+(1+x)+1}{1+x-1} + \frac{(1-x)^2+(1-x)+1}{1-x-1} \\ &= \frac{(1+x)^2+(1+x)+\cancel{1}}{x} - \frac{(1-x)^2+(1-x)+\cancel{1}}{x} \\ &= \frac{\cancel{1}+2x+\cancel{x^2}+\cancel{1}+x-\cancel{1}+2x-\cancel{x^2}-\cancel{1}+x}{x} = \frac{6\cancel{x}}{\cancel{x}} \\ &= 6 = 2\times3. \end{aligned}$$
   Le point Ω est donc bien $\boxed{\text{centre de symétrie}}$ de la courbe de f.
9. (a) $f\left([\beta\,;+\infty[\right) = \boxed{\left[3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$.

   (b) $f\left(]1\,;+\infty[\right) = \boxed{\left[3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$.

   (c) Comme $f(0) = -1$ et $f(3) = \dfrac{13}{2}$, on a :
$$f\left([0\,;3]\setminus\{1\}\right) = f\left([0\,;1[\cup]1\,;3]\right) = \boxed{]-\infty\,;-1]\cup\left[\frac{13}{2}\,;+\infty\right[}.$$

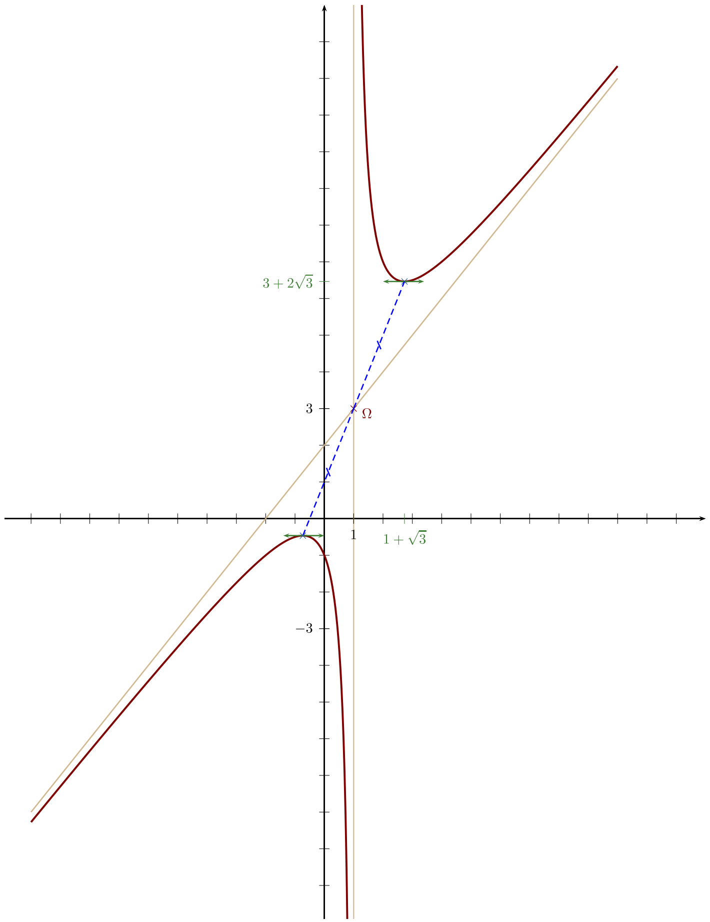

Figure III.1 – $f : x \longmapsto \dfrac{x^2+x+1}{x-1}$.

(d) $f(\mathcal{D}_f) = \boxed{\left]-\infty\,;3-2\sqrt{3}\right] \cup \left[3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$.

10. De même, déterminer les images réciproques suivantes :

(a) $f^{-1}(\mathbb{R}) = \boxed{\mathcal{D}_f}$

(b) $f^{-1}\big([f(\beta)\,;+\infty[\big) = \boxed{]1\,;+\infty[}$.

(c) $f^{-1}\big([0\,;3]\big) = \boxed{\varnothing}$

(d) $f(x)=7 \iff \dfrac{x^2+x+1}{x-1}=7 \iff x^2-6x+8=0 \iff (x-2)(x-4)=0$
$\iff x=2$ ou $x=4$.

Donc $f^{-1}(\{7\}) = \boxed{\{2\,;4\}}$.

11. D'après l'étude précédente, la fonction f est continue et strictement monotone de $\mathrm{I} = \left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$ sur $\mathrm{J} = f(\mathrm{I}) = \left[3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.
En posant g, restriction de f à I corestreinte à J, celle-ci y est clairement injective et surjective donc définit une bijection de $\boxed{\mathrm{I} = \left[1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$ sur $\boxed{\mathrm{J} = \left[3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$.

12. La fonction g est bijective, continue et dérivable de I sur J de dérivée $g'(x) = \dfrac{x^2-2x-2}{(x-1)^2}$ non nulle sur $\mathring{\mathrm{I}} = \left]1+\sqrt{3}\,;+\infty\right[$.

La fonction h est donc dérivable sur $\boxed{\mathring{\mathrm{J}} = \left]3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[}$.

Comme $g'\beta) = 0$, la courbe de $g = f_{|\mathrm{I}}$ admet une tangente « horizontale » en β. La courbe de h admet donc une tangente « $\boxed{\text{verticale}}$ » par symétrie par rapport à $y=x$ en $f(\beta) = 3+2\sqrt{3}$.

13. (a) Une factorisation rapide donne :

$$y^2-6y-3 = \big(y-(3-2\sqrt{3})\big)\big(y-(3+2\sqrt{3})\big).$$

Le signe d'un trinôme étant celui du terme dominant à l'extérieur des racines, on en déduit que :

$$\boxed{\forall y \in \mathrm{J} = \left[3+2\sqrt{3}\,;+\infty\right[, \quad y^2-6y-3 \geqslant 0}.$$

(b) D'après la question précédente, pour tout $y \in \mathrm{J}$, $\sqrt{y^2-6y-3}$ est correctement défini et on a alors les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned}
\frac{y-1-\sqrt{y^2-6y-3}}{2} \leqslant 1+\sqrt{3} &\iff y-1-\sqrt{y^2-6y-3} \leqslant 2+2\sqrt{3}\\
&\iff y-1 \leqslant 2+2\sqrt{3}+\sqrt{y^2-6y-3}\\
&\iff y-3-2\sqrt{3} \leqslant \sqrt{y^2-6y-3} \quad (y\in\mathrm{J} \iff y-3+2\sqrt{3}\geqslant 0)\\
&\iff (y-3-2\sqrt{3})^2 \leqslant y^2-6y-3 \quad (x\mapsto\sqrt{x} \text{ croissante})\\
&\iff -(6+4\sqrt{3})y+(3+2\sqrt{3})^2 \leqslant -6y-3\\
&\iff -4\sqrt{3}y+(3+2\sqrt{3})^2 \leqslant -3\\
&\iff y \geqslant \frac{3+(3+2\sqrt{3})^2}{4\sqrt{3}} = \frac{24+12\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}\\
&\iff y \geqslant 1+2\sqrt{3} \iff y\in\mathrm{J}.
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $(x;\,y)\,\mathrm{I}\times\mathrm{J}$, on a :

$$\begin{aligned}
y = g(x) &\iff y = \frac{x^2+x+1}{x-1} \qquad (x \geqslant 1+\sqrt{3} > 1)\\
&\iff yx-y = x^2+x+1 \iff x^2+(1-y)x+1+y = 0.
\end{aligned}$$

Soit Δ le discriminant du polynôme en x, on a :

$$\Delta = (1-y)^2-4(1+y) = y^2-6y-3.$$

D'après la question (13a), $\Delta \geqslant 0$, donc :

$$y = g(x) \iff x = \frac{y-1-\sqrt{y^2-6y-3}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{y-1+\sqrt{y^2-6y-3}}{2}.$$

La question (13b) va nous aider à déterminer $h(y)$:

— Si $g(x) = y > 3+2\sqrt{3} = g(1+\sqrt{3})$ alors, par stricte croissance de g, on en déduit que :

$$x > 1+\sqrt{3} \geqslant \frac{y-1-\sqrt{y^2-6y-3}}{2}.$$

En particulier $x \neq \dfrac{y-1-\sqrt{y^2-6y-3}}{2}$ donc $h(y) = \dfrac{y-1+\sqrt{y^2-6y-3}}{2}$.

— Si $g(x) = y = 3+2\sqrt{3} = g(1+\sqrt{3})$ alors, par injectivité de g, $x = 1+\sqrt{3}$.

Or, $$\frac{y-1+\sqrt{y^2-6y-3}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}+\sqrt{\left(2+2\sqrt{3}\right)^2-6\left(2+2\sqrt{3}\right)-3}}{2} = \frac{2+2\sqrt{3}}{2}$$
$$= 1+\sqrt{3} = x.$$

Ainsi, dans tous les cas,

$$\forall y \in \mathrm{J}, \boxed{h(y) = \frac{y-1+\sqrt{y^2-6y-3}}{2}}.$$

14. (a) Pour tout $x > 1$, on a :

$$\frac{f(x)}{x^2} = \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}{x-1} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt{x}}{f(x)} = \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{x}\left(x+1+\frac{1}{x}\right)}$$

Donc, d'après les théorèmes sur les limites de sommes, produits et quotients, on obtient :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x^2} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\sqrt{x}} = +\infty}.$$

(b) Graphiquement, la courbe $\mathscr{C}_f$ sera au-dessous de celle de $x \longmapsto x^2$ et au-dessus de celle de $x \longmapsto \sqrt{x}$ en $+\infty$.

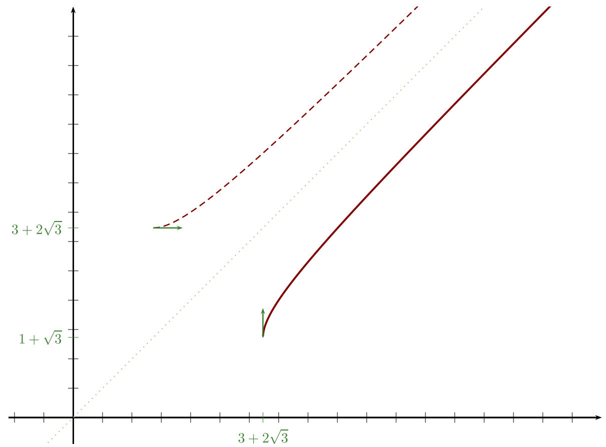

Figure III.2 – $h : y \longmapsto \dfrac{y-1+\sqrt{y^2-6y-3}}{2}$.