Sommes et Produits

1. Sommes des puissances p-ièmes des n premiers entiers.

   Posons $a_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$, $c_n = \sum_{k=1}^{n} k^3$ et $d_n = \sum_{k=1}^{n} k^4$.

   (a) En remarquant que $c_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3$, montrer que $c_{n+1} = c_n + 3b_n + 3a_n + n + 1$.
   En déduire la valeur de b_n.

   (b) Montrer de même que $d_{n+1} = d_n + 4c_n + 6b_n + 4a_n + n + 1$.
   En déduire la valeur de c_n.

   (c) **Généralisation :** si $\mathrm{S}_n^p = \sum_{k=0}^{n} k^p$, montrer la formule de récurrence de Pascal (1654) :

   $$(p+1)\,\mathrm{S}_n^p = (n+1)^{p+1} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} \mathrm{S}_n^k.$$

   (d) Calculer $d_n = \mathrm{S}_n^4$ et vérifier que $d_n = (6a_n - 1)\,\frac{b_n}{5}$.

2. Remplir le tableau après avoir calculé les sommes correspondantes :

$a_{i,j}$	1	i	j	$i+j$	ij
$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$					
$\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$					

3. (a) Calculer $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \min(i;\, j)$.

   (b) En déduire la valeur de $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \max(i;\, j)$ puis celle de $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$.

4. Inégalité de Tchebychev :

   (a) Montrer que

   $$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right).$$

   (b) En déduire que si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \dots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \dots \leqslant b_n$ alors

   $$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n} \times \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n} \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n}.$$

   (Autrement dit, lorsque deux séries de n nombres sont rangés dans l'ordre croissant, le produit de leurs moyennes est inférieur ou égal à la moyenne de leurs produits)