Sommes et Produits

1. Sommes des puissances p-ièmes des n premiers entiers.

   Posons $a_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$, $b_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2$, $c_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3$ et $d_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^4$.

   (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} c_{n+1} &= \sum_{k=1}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^{n} (k+1)^3 \qquad \text{(après réindexation)} \\ &= \sum_{k=0}^{n} (k^3+3k^2+3k+1) = c_n + 3b_n + 3a_n + (n+1). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où, } 3b_n &= c_{n+1} - c_n - 3a_n - (n+1) = \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^3 - k^3\right) - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) \\ &= (n+1)^3 - \frac{3n(n+1)}{2} - (n+1) = (n+1)\left((n+1)^2 - \frac{3n}{2} - 1\right) \\ &= (n+1)\left(n(n+2) - \frac{3n}{2}\right) = n(n+1)\left(n+\frac{1}{2}\right) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2} \end{aligned}$$

   Donc, $b_n = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   (b) Le raisonnement est identique pour d_n en remarquant que $d_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (k+1)^4$ puis en développant :

$$d_{n+1} = d_n + 4c_n + 6b_n + 4a_n + n + 1.$$

   Puis,

$$\begin{aligned} 4c_n &= d_{n+1} - d_n - 6b_n - 4a_n - (n+1) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)^4 - k^4\right) - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1) \\ &= (n+1)\Big((n+1)^3 - n(2n+1) - (2n+1)\Big) \\ &= (n+1)\Big((n+1)^3 - (2n+1)(n+1)\Big) \\ &= (n+1)^2\left((n+1)^2 - 2n - 1\right) = n^2(n+1)^2. \end{aligned}$$

   Donc, $c_n = \left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

   (c) Il suffit de remarquer que $S_{n+1}^{p+1} = \displaystyle\sum_{j=1}^{n+1} j^{p+1} = \sum_{j=0}^{n} (j+1)^{p+1}$ et de développer $(j+1)^{p+1}$ avec le binôme de Newton.

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{p+1} &= \sum_{j=0}^{n} (j+1)^{p+1} = \sum_{j=0}^{n}\sum_{k=0}^{p+1} \binom{p+1}{k} j^k = \sum_{j=0}^{n} \left(j^{p+1} + (p+1)j^p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} j^k\right) \\ &= S_n^{p+1} + (p+1)S_n^p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} \left(\sum_{j=0}^{n} j^k\right) = S_n^{p+1} + (p+1)S_n^p + \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_n^k. \end{aligned}$$

   D'où, $(p+1)S_n^p = S_{n+1}^{p+1} - S_n^{p+1} - \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_n^k$.

   Or, $S_{n+1}^{p+1} - S_n^{p+1} = \displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k^{p+1} - \sum_{k=1}^{n} k^{p+1} = \sum_{k=0}^{n} \Big((k+1)^{p+1} - k^{p+1}\Big) = (n+1)^{p+1}$.

   On obtient finalement :

$$(p+1)\, S_n^p = (n+1)^{p+1} - \sum_{k=0}^{p-1} \binom{p+1}{k} S_n^k.$$

   (d) D'après la question précédente, on a :

$$\begin{aligned} 5d_n = 5S_n^4 &= (n+1)^5 - \sum_{k=0}^{3} \binom{5}{k} S_n^k = (n+1)^5 - S_n^0 - 5S_n^1 - 10S_n^2 - 10S_n^3 \\ &= (n+1)^5 - (n+1) - \frac{5n(n+1)}{2} - \frac{5n(n+1)(2n+1)}{3} - \frac{5n^2(n+1)^2}{2} \\ &= \frac{(n+1)}{6}\Big(6(n+1)^4 - 6 - 15n - 10n(2n+1) - 15n^2(n+1)\Big) \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6}. \end{aligned}$$

   Remarque : Pas de grandes idées pour factoriser à part développer, trouver les racines en évidences et effectuer la division euclidienne. Sorry

   On obtient finalement :

$$d_n = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{6 \times 5} = \frac{b_n}{5}\left(6\,\frac{n(n+1)}{2} - 1\right) = (6a_n - 1)\,\frac{b_n}{5}.$$

Remarque : Il existe une foule de relations entre les sommes S_n^k lorsque k varie dans $\mathbb{N}$ comme, par exemple :

$$S_n^2 + S_n = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

La somme des carrés des n premiers nombres entiers ajoutée à la somme de ces n mêmes nombres est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs dont le premier est n.

$$S_n^2 - S_n = \frac{1}{3}(n-1)n(n+1)$$

La somme des carrés des n premiers nombres entiers diminuée de la somme de ces n mêmes nombres est égale au tiers du produit de trois nombres entiers consécutifs dont le premier est $n-1$.

$$S_n^3 - S_n = \frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$$

La somme des cubes des n premiers nombres entiers diminuée de la somme de ces n mêmes nombres est égale au quart du produit de quatre nombres entiers consécutifs dont le premier est $n-1$.

2. Pour les rectangle, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} 1 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} 1 = n\sum_{j=1}^{n} 1 = n^2.\\
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{j=1}^{n} \frac{n(n+1)}{2} = n\times\frac{n(n+1)}{2}.\\
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} j &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i = n\times\frac{n(n+1)}{2}.\\
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} i+j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i+j = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{n} 1+\sum_{j=1}^{n} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(ni+\frac{n(n+1)}{2}\right)\\
&= n\sum_{i=1}^{n} i+\frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} 1 = n^2(n+1).\\
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} ij = \sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}\sum_{i=1}^{n} i = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2.
\end{aligned}$$

Et, pour les triangles, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} 1 &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} 1 = \sum_{j=1}^{n} j = \frac{n(n+1)}{2}.\\
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} i &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} i = \sum_{j=1}^{n}\frac{j(j+1)}{2} = \frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n} j^2+\sum_{j=1}^{n} j\right)\\
&= \frac{1}{2}n(n+1)\left(\frac{2n+1}{6}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{12}n(n+1)(2n+4) = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2).\\
\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} j &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j} j = \sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1).\\
\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} i+j &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} i+j = \sum_{i=1}^{n}\left(i\sum_{j=1}^{i} 1+\sum_{j=1}^{i} j\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(i^2+\frac{i(i+1)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{6}n(n+1)(n+2) = \frac{1}{2}n(n+1)^2.\\
\sum_{1\leqslant j\leqslant i\leqslant n} ij &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{i} ij = \sum_{i=1}^{n} i\sum_{j=1}^{i} j = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} i^2(i+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^3+\sum_{i=1}^{n} i^2\right)\\
&= \frac{1}{8}n^2(n+1)^2+\frac{1}{12}n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{24}n(n+1)(3n(n+1)+2(2n+1))\\
&= \frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+7n+2).
\end{aligned}$$

$a_{i,j}$	1	i	j	$i+j$	ij
$\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} a_{i,j}$	n^2	$\frac{n^2(n+1)}{2}$	$\frac{n^2(n+1)}{2}$	$n^2(n+1)$	$\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$
$\displaystyle\sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{i,j}$	$\frac{n(n+1)}{2}$	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$	$\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$	$\frac{1}{2}n(n+1)^2$	$\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2+7n+2)$

3. (a)

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\min(i;\,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i;\,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j+\sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2}+(n-i)i\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left((2n+1)i-i^2\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}-\frac{n(n+1)(2n+1)}{12}\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.
\end{aligned}$$

(b) On pourrait remarquer que $\max(i;\,j) = n-\min(n-i;\,n-j)$ et utiliser le résultat précédent mais je trouve cela plus long que de refaire comme précédemment :

(c)

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\max(i;\,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i;\,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i+\sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2+(n-i)\frac{(i+1)+n}{2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i+n(n+1)\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{12}-\frac{n(n+1)}{4}+\frac{n^2(n+1)}{2}\\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}.
\end{aligned}$$

Enfin, remarquant cette fois que $|i-j| = \max(i;\,j)-\min(i;\,j)$, on obtient :

(d)

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j| = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{n(n+1)(4n-1)}{6} = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}.$$

4. (a) On a, d'une part :

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_j-a_i)(b_j-b_i) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}(a_j-a_i)(b_j-b_i) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}\left(a_jb_j-a_jb_i-a_ib_j+a_ib_i\right)\\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_jb_j-\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sum_{i=1}^{j-1}b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\sum_{i=1}^{j-1}a_i\right)+\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1}a_ib_i\\
&= \sum_{j=2}^{n}(j-1)a_jb_j-\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sum_{i=1}^{j-1}b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\sum_{i=1}^{j-1}a_i\right)+\sum_{j=1}^{n-1}(n-j)a_jb_j\\
&= \sum_{j=2}^{n-1}(n-1)a_jb_j+(n-1)(a_{n-1}b_{n-1}+a_1b_1)\\
&\qquad -\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sum_{i=1}^{j-1}b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\sum_{i=1}^{j-1}a_i\right)\\
&= (n-1)\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sum_{i=1}^{j-1}b_i\right)-\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\sum_{i=1}^{j-1}a_i\right)\\
&= n\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-\left(\sum_{j=1}^{n}\left(a_j\sum_{i=1}^{j-1}b_i\right)+\sum_{k=1}^{n}a_kb_k+\sum_{j=1}^{n}\left(b_j\sum_{i=1}^{j-1}a_i\right)\right).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_j\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{i=1}^{n} b_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_j b_i$$
$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_j b_i + \sum_{j=1}^{n} a_j b_j + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} a_j b_i$$

Or, $\displaystyle\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=j+1}^{n} a_j b_i = \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_i b_j = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{j-1} a_i b_j$,

$$= \sum_{j=1}^{n}\left(a_j \sum_{i=1}^{j-1} b_i\right) + \sum_{k=1}^{n} a_k b_k + \sum_{j=1}^{n}\left(b_j \sum_{i=1}^{j-1} a_i\right)$$

Donc, $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i) = n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$.

(b) Si $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ et $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ alors tous les facteurs $a_j - a_i$ et $b_j - b_i$ sont positifs dès que $i < j$. En particulier,

$$0 \leqslant \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_j - a_i)(b_j - b_i)$$
$$\iff \quad 0 \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right)$$
$$\iff \quad \left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k\right) \leqslant n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right) \qquad \text{(en divisant par } n^2 > 0\text{)}$$
$$\iff \quad \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i}{n}\right)\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} b_i}{n}\right) \leqslant \frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{n}.$$