Fonctions, sommes et inégalités

Exercice 1 (Identité de Lagrange) :

1 Montrer que, pour tout entier n et toutes familles $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$, $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de réels on a :

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 + \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} (a_i b_j - a_j b_i)^2 .$$

2 En déduire que le produit de 2 sommes de 2 carrés (parfaits) est encore une somme de 2 carrés, et que plus généralement, le produit de 2 sommes de n carrés est une somme de ... carrés.

3 En déduire, pour $\overrightarrow{u} = (a_1, a_2, ..., a_n)$ et $\overrightarrow{v} = (b_1, b_2, ..., b_n) \in \mathbb{R}^n$ l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqslant \sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)}.$$

À quelle CNS portant sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ a-t-on égalité entre les deux membres de cette inégalité ?

Exercice 2 :

1 Soit $f : \begin{array}{ccc} [0\,;+\infty[& \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{x}{1+x} \end{array}$. Montrer que f est croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2 En déduire que, $\forall\,(x;\,y) \in \mathbb{R}^2$, $\dfrac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \dfrac{|x|}{1+|x|} + \dfrac{|y|}{1+|y|}$.

Exercice 3 :

Le but de cet exercice est de déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant la relation :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |f(x) + f(y)| = |x + y|. \tag{E}$$

1 ① On pose $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & x. \end{array}$ Montrer que f_1 vérifie (E).

② On pose $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & -x. \end{array}$ Montrer que f_2 vérifie (E).

2 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Parmi les deux propriétés suivantes, une est vraie, laquelle ? On prouvera cette propriété.

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff ((\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x), \tag{V.1}$$

$$(\forall x \in \mathbb{R}, |f(x)| = |x|) \iff (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x \text{ ou } f(x) = -x). \tag{V.2}$$

3 Soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant (E).

① Montrer que $f(0) = 0$.

② Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f(x)| = |x|$.

③ i. Écrire la négation de la propriété :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

ii. En raisonnant par l'absurde, montrer que :

$$(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = -x).$$

4 À l'aide d'un raisonnement par analyse-synthèse conclure.