Fonctions, sommes et inégalités

Exercice 1 (Identité de Lagrange) :

1 Soient $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ et $(b_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ deux familles de réels. Développons et arrangeons :

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}\Big((a_ib_j)^2-2a_ib_ja_jb_i+(a_jb_i)^2\Big)\\ &= \sum_{\substack{1\leqslant i,j\leqslant n\\ i\neq j}}\Big((a_ib_j)^2-a_ib_ia_jb_j\Big)=\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}\Big((a_ib_j)^2-a_ib_ia_jb_j\Big)\\ &= \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}(a_ib_j)^2-\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}a_ib_ia_jb_j\\ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j^2\right)-\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)\left(\sum_{j=1}^n b_j\right)\end{aligned}$$

2 Évident en faisant varier $n\in\mathbb{N}^*$.
En particulier, pour $n=2$:

$$(a^2+b^2)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2)=(a\mathrm{A}+b\mathrm{B})^2+(a\mathrm{B}-b\mathrm{A})^2.$$

Pour $n=3$:

$$(a^2+b^2+c^2)(\mathrm{A}^2+\mathrm{B}^2+\mathrm{C}^2)=(a\mathrm{A}+b\mathrm{B}+c\mathrm{C})^2+(a\mathrm{B}-\mathrm{A}b)^2+(b\mathrm{C}-\mathrm{B}c)^2+(c\mathrm{A}-\mathrm{C}a)^2.$$

Plus généralement, la somme $\displaystyle\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}$ compte $\dfrac{(n-1)n}{2}$ termes donc le produit de 2 sommes de n carrés est une somme de $1+\dfrac{(n-1)n}{2}$ carrés.

3 Pour tous i et j, on a : $(a_ib_j-a_jb_i)^2\geqslant 0$ donc :

$$\begin{aligned}0\leqslant\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2 &\iff 0\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)-\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\\ &\iff (0\leqslant)\left(\sum_{k=1}^n a_kb_k\right)^2\leqslant\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)\\ &\iff \left|\sum_{k=1}^n a_kb_k\right|\leqslant\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)}\sqrt{\left(\sum_{k=1}^n b_k^2\right)}.\end{aligned}\tag{V.1}$$

On a égalité entre les deux membres de (V.1) si, et seulement si $\forall\,(i;\,j)\in(\llbracket 1\,;n\rrbracket)^2,\ a_ib_j-a_jb_i=0$ *i.e.* les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont proportionnelles.
Il y a donc égalité dans (V.1) si, et seulement si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont liés (dans $\mathbb{R}$).

Exercice 2 :

1 Nul besoin ici de la dérivée. Commençons par remarquer que $\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$.
Pour tous réels positifs a et b tels que $a<b$, on a alors :

$$\begin{aligned}a<b &\implies (0<)\,1+a<1+b\implies\frac{1}{1+a}>\frac{1}{1+b}\\ &\implies -\frac{1}{1+a}<-\frac{1}{1+b}\implies 1-\frac{1}{1+a}<1-\frac{1}{1+b}\\ &\implies f(a)<f(b).\end{aligned}$$

La fonction f est donc (strictement) croissante sur $\mathbb{R}_+$.

2 Soient $(x;\,y)\in\mathbb{R}^2$.
L'inégalité triangulaire s'écrit $|x+y|\leqslant|y|+|y|$.
Il suffit d'appliquer le résultat précédent avec $a=|x+y|$ et $b=|x|+|y|$.
On obtient alors :

$$f(a)\leqslant f(b)\iff\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leqslant\frac{|x|+|y|}{1+|x|+|y|}=\frac{|x|}{1+|x|+|y|}+\frac{|y|}{1+|x|+|y|}$$

Comme $1+|x|+|y|\leqslant 1+|x|$ et $1+|x|+|y|\leqslant 1+|y|$,

$$\text{Donc, }\quad\frac{|x+y|}{1+|x+y|}\leqslant\frac{|x|}{1+|x|}+\frac{|y|}{1+|y|}$$

Exercice 3 :

1 ① Il suffit d'écrire :

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ |f_1(x)+f_1(y)|=|x+y|.$$

② De même,

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ |f_2(x)+f_2(y)|=|-x-y|=|-(x+y)|=|x+y|.$$

2 L'assertion $|f(x)|=|x|$ à traduire suit le quantificateur sans retour en arrière donc c'est la seconde proposition qui est vraie :

$$(\forall x\in\mathbb{R},\ |f(x)|=|x|)\iff(\forall x\in\mathbb{R},\ f(x)=x\text{ ou }f(x)=-x).$$

Rien à démontrer si ce n'est traduire la valeur absolue : $|f(x)|=|x|\iff f(x)=x$ ou $f(x)=-x$.

3 ① Soit f vérifiant la proposition

$$\forall x,y\in\mathbb{R},\ |f(x)+f(y)|=|x+y|.\tag{E}$$

On a alors $|f(0)+f(0)|=|0+0|\iff|f(0)|=|0|=0\iff f(0)=0.$

② Soient $x\in\mathbb{R}$ et f vérifiant (E). On a :

$$|f(x)+f(0)|=|x+0|\iff|f(x)|=|x|.$$

③ i. $(\exists\,x_0\in\mathbb{R},f(x_0)\neq x_0)$ et $(\exists\,x_1\in\mathbb{R},f(x_1)\neq -x_1)$.
ii. Par un raisonnement par l'absurde supposons f vérifiant (E) et

$$(\exists\,x_0\in\mathbb{R},f(x_0)\neq x_0)\text{ et }(\exists\,x_1\in\mathbb{R},f(x_1)\neq -x_1).$$

D'après (②), la fonction f est telle que $f(x)|=|x|$ *i.e.*

$$\forall x\in\mathbb{R},f(x)=x\text{ ou }f(x)=-x.$$

Comme $f(x_0) \neq x_0$, le seul choix possible pour $f(x_0)$ est donc $f(x_0) = -x_0$. Par le même raisonnement, $f(x_1) = x_1$.
On a alors $|f(x_0) + f(x_1)| = |-x_0 + x_1| = |x_1 - x_0|$.
Si f vérifiait (E) alors on aurait

$$|x_0 + x_1| = |x_1 - x_0| \iff x_0 + \cancel{x_1} = \cancel{x_1} - x_0 \text{ ou } \cancel{x_0} + x_1 = -x_1 + \cancel{x_0}$$
$$x_0 = 0 \qquad\qquad x_1 = 0.$$

Comme $f(0) = 0$, ceci est impossible par définition de x_0 et x_1 d'où la contradiction *i.e.*

$$(\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R},\, f(x) = -x).$$

4 On a vu à la question (1) que les fonctions f_1 et f_2 satisfont à (E) [1].
Réciproquement, la question (3 (3)ii) montre qu'une fonction f vérifiant (E) est nécessairement de la forme f_1 ou f_2 [2].
On peut donc conclure par un raisonnement d'Analyse-Synthèse que l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ satisfaisant (E) est : $\{f_1;\, f_2\}$.

[1]. Ce qui représente une condition suffisante (phase de Synthèse).
[2]. Phase d'analyse.