Fonctions circulaires - Nombres complexes

Exercice 1 :

1 Résoudre l'équation :

$$\arcsin x + \arcsin\left(x\sqrt{15}\right) = \frac{\pi}{2}$$

2 Simplifier pour $x \in \mathbb{R}$, $\arccos\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$.

On montrera notamment que la fonction $x \longmapsto \arccos\sqrt{\dfrac{1-\cos x}{2}}$ est paire et 2π-périodique.

3 ① Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer $\arctan\dfrac{k}{k+1} - \arctan\dfrac{k-1}{k}$.

② En déduire la limite de la suite (S_n) définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathrm{S}_n = \sum_{k=1}^{n} \arctan\frac{1}{2k^2}$$

Exercice 2 (Résolution des équations de degré 3) :

On s'intéresse dans cet exercice aux équations de la forme $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, où a, b, c, d sont des **réels**, et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $a \neq 0$.

1 Démontrer que si l'on remplace z par l'inconnue $\mathrm{Z} = z + \dfrac{b}{3a}$, on se ramène à l'équation suivante, où p et q sont deux **réels**, à déterminer en fonction de a, b, c et d :

$$\mathrm{Z}^3 + p\mathrm{Z} + q = 0 \qquad (\mathrm{E})$$

2 Soit Z une solution de (E). On cherche deux nombres **complexes** u et v tels que :

$$u + v = \mathrm{Z} \qquad \text{et} \qquad uv = -\frac{p}{3}$$

① Exprimer :

— $u^3 + v^3$ en fonction de q (on pourra s'intéresser à $(u+v)^3$) ;

— u^3v^3 en fonction de p.

② En déduire que les deux complexes u^3 et v^3 sont solutions d'une équation de degré 2 que l'on précisera.

③ On pose $\Delta = \dfrac{1}{27}(4p^3 + 27q^2)$. Déterminer u^3 et v^3 en discutant sur Δ.

④ Expliquer alors une méthode de résolution de (E) et la forme de ses solutions.

3 Appliquer la méthode précédente à l'équation :

$$z^3 + 12z^2 + 42z + 44 = 0$$