

Fonctions circulaires - Nombres complexes

Exercice 1 :

1 Résoudre l'équation :

$$\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{15}) = \frac{\pi}{2}$$

On résout l'équation sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$.

$$\begin{aligned} \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{15}) &= \frac{\pi}{2} \\ \Rightarrow \cos(\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{15})) &= \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ \Rightarrow \cos(\arcsin x) \cos(\arcsin(x\sqrt{15})) - \sin(\arcsin x) \sin(\arcsin(x\sqrt{15})) &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{1-x^2} \times \sqrt{1-(x\sqrt{15})^2} - x \times x\sqrt{15} &= 0 \\ \Rightarrow \sqrt{(1-x^2)(1-15x^2)} &= x^2\sqrt{15} \\ \Rightarrow (1-x^2)(1-15x^2) &= 15x^4 \\ \Rightarrow 1-16x^2 &= 0 \\ \Rightarrow (1-4x)(1+4x) &= 0 \\ \Rightarrow x = \frac{1}{4} \text{ ou } x = -\frac{1}{4} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathcal{S} \subset \left\{\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right\}$$

Il reste à tester les valeurs :

- Si $x = -\frac{1}{4}$, on a $\arcsin x + \arcsin(x\sqrt{15}) < 0$ donc $-\frac{1}{4}$ **n'est pas solution de l'équation.**
- Par ailleurs, la fonction $f : x \mapsto \arcsin x + \arcsin(x\sqrt{15})$ est continue sur $\left[-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$ et strictement croissante. Elle établit donc une bijection de $\left[-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$ sur $\left[\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{15}}\right) - \frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$. Comme $\frac{\pi}{2} \in \left[\arcsin\left(\frac{-1}{\sqrt{15}}\right) - \frac{\pi}{2}, \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{15}}\right) + \frac{\pi}{2}\right]$, on en déduit que l'équation $f(x) = \frac{\pi}{2}$ admet une, et une seule, solution dans $\left[-\frac{1}{\sqrt{15}}, \frac{1}{\sqrt{15}}\right]$. Si $\frac{1}{4}$ n'était pas solution, $\frac{\pi}{2}$ n'aurait pas d'antécédent par f . C'est absurde ! Donc $\frac{1}{4}$ **est une solution de l'équation.**

Bilan :

$$\mathcal{S} = \left\{\frac{1}{4}\right\}.$$

2 Posons $\phi : x \mapsto \arccos \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.Notons que la fonction ϕ est bien définie sur $\mathbb{R}$. Par ailleurs, elle est :

- paire ($\forall x \in \mathbb{R}, \phi(-x) = \phi(x)$) car $\cos$ l'est ;

- périodique de période 2π ($\forall x \in \mathbb{R}, \phi(x+2\pi) = \phi(x)$) car $\cos$ l'est.

On peut donc étudier ϕ sur $[0, \pi]$.Soit $x \in [0, \pi]$.

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \arccos \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \arccos \sqrt{\frac{1-(1-2\sin^2 \frac{x}{2})}{2}} \\ &= \arccos \sqrt{\sin^2 \frac{x}{2}} \\ &= \arccos \left(\sin \frac{x}{2}\right) \text{ car } \sin \frac{x}{2} \geq 0 \\ &= \frac{\pi}{2} - \arcsin \left(\sin \frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} \text{ car } \frac{x}{2} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{aligned}$$

On en déduit par parité que $\forall x \in [-\pi, 0], \phi(x) = \phi(-x) = \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2}$.De manière générale, pour $k \in \mathbb{Z}$:

- si $x \in [2k\pi, (2k+1)\pi]$, on a $\phi(x) = \phi(x-2k\pi) = \frac{\pi}{2} - \frac{x-2k\pi}{2}$ car $x-2k\pi \in [0, \pi]$.
- si $x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi]$, on a $\phi(x) = \phi(x-2k\pi) = \frac{\pi}{2} + \frac{x-2k\pi}{2}$ car $x-2k\pi \in [-\pi, 0]$.

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \begin{cases} \forall x \in [2k\pi, (2k+1)\pi], & \arccos \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{x-2k\pi}{2} \\ \forall x \in [(2k-1)\pi, 2k\pi], & \arccos \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}} = \frac{\pi}{2} + \frac{x-2k\pi}{2} \end{cases}$$

3 ① Soit $k \in \mathbb{N}^*$, calculons $\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k}$.

- $\frac{k}{k+1} \in [0, 1]$ donc $\arctan \frac{k}{k+1} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$.

De même $\arctan \frac{k-1}{k} \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ donc $-\arctan \frac{k-1}{k} \in \left[-\frac{\pi}{4}, 0\right]$.En sommant, on a $\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k} \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ et a fortiori

$$\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k} \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

- On peut donc composer par $\tan$:

$$\begin{aligned} \tan \left(\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k} \right) &= \frac{\tan \left(\arctan \frac{k}{k+1} \right) - \tan \left(\arctan \frac{k-1}{k} \right)}{1 + \tan \left(\arctan \frac{k}{k+1} \right) \tan \left(\arctan \frac{k-1}{k} \right)} \\ &= \frac{\frac{k}{k+1} - \frac{k-1}{k}}{1 + \frac{k}{k+1} \times \frac{k-1}{k}} \\ &= \frac{k^2 - (k^2-1)}{k^2 - (k^2-1)} \\ &= \frac{k(k+1)}{2k^2} \\ &= \frac{k(k+1)}{2k^2} \end{aligned}$$

$$\text{Donc, } \tan \left(\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k} \right) = \frac{1}{2k^2}.$$

Par conséquent, $\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k}$ est l'angle de $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ dont la tangente vaut $\frac{1}{2k^2}$.

$$\text{D'où, } \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k} = \arctan \frac{1}{2k^2}.$$

- ② On considère la suite (S_n) définie par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{2k^2}$

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n &= \sum_{k=1}^n \arctan \frac{1}{2k^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \left(\arctan \frac{k}{k+1} - \arctan \frac{k-1}{k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \arctan \frac{k}{k+1} \right) - \left(\sum_{k=1}^n \arctan \frac{k-1}{k} \right) \\ &= \left(\sum_{k=1}^n \arctan \frac{k}{k+1} \right) - \left(\sum_{k=0}^{n-1} \arctan \frac{k}{k+1} \right) \\ &= \arctan \frac{n}{n+1} \end{aligned}$$

Or, $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 1} \arctan x = \frac{\pi}{4} \end{cases}$ donc, par composition des limites :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{\pi}{4}$$

Remarque : On notera bientôt $\sum_{k=1}^{+\infty} \arctan \frac{1}{2k^2} = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 2 : On s'intéresse dans cet exercice aux équations de la forme $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$, où a, b, c, d sont des réels, et $z \in \mathbb{C}$. On suppose que $a \neq 0$.

- ① En posant $Z = z + \frac{b}{3a}$, on a

$$\begin{aligned} az^3 + bz^2 + cz + d = 0 &\iff z^3 + \frac{b}{a}z^2 + \frac{c}{a}z + \frac{d}{a} = 0 \\ &\iff \left(Z - \frac{b}{3a} \right)^3 + \frac{b}{a} \left(Z - \frac{b}{3a} \right)^2 + \frac{c}{a} \left(Z - \frac{b}{3a} \right) + \frac{d}{a} = 0 \\ &\iff Z^3 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \right) Z + \left(\frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} \right) = 0 \\ &\iff Z^3 + pZ + q = 0 \end{aligned}$$

en posant $\left\{ p = \frac{c}{a} - \frac{b^2}{3a^2} \right\}$ et $\left\{ q = \frac{d}{a} + \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} \right\}$.

On remarque que comme a, b, c, d sont réels, on a bien $p, q \in \mathbb{R}$.

- ② On cherche à exprimer Z , une solution de $Z^3 + pZ + q = 0$ sous la forme $Z = u + v$ avec $uv = -\frac{p}{3}$.

- ① — $(u+v)^3 = u^3 + 3u^2v + 3uv^2 + v^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v)$.
Ainsi $u^3 + v^3 = (u+v)^3 - 3uv(u+v) = Z^3 - 3\left(-\frac{p}{3}\right)Z = Z^3 + pZ$.
Or par hypothèse, Z vérifie $Z^3 + pZ + q = 0$, donc $Z^3 + pZ = -q$.
On en déduit : $u^3 + v^3 = -q$.

$$-u^3v^3 = (uv)^3 \text{ d'où } u^3v^3 = -\frac{p^3}{27}.$$

- ② On connaît la somme et le produit des nombres complexes u^3 et v^3 .

$$u^3 \text{ et } v^3 \text{ sont donc solution de l'équation } \Lambda^2 + q\Lambda - \frac{p^3}{27} = 0.$$

- ③ Le discriminant de l'équation est $\Delta = q^2 - 4\left(-\frac{p^3}{27}\right) = \frac{1}{27}(4p^3 + 27q^2)$.

On a remarqué précédemment que p et q sont réels.

Par conséquent, $\Delta \in \mathbb{R}$. Trois cas se présentent alors :

Si $\Delta > 0$ l'équation $\Lambda^2 + q\Lambda - \frac{p^3}{27} = 0$ admet deux solutions réelles distinctes :

$$\Lambda_1 = \frac{-q - \sqrt{\Delta}}{2} \text{ et } \Lambda_2 = \frac{-q + \sqrt{\Delta}}{2}$$

On a alors $\{u^3, v^3\} = \{\Lambda_1, \Lambda_2\}$. Et par symétrie du problème, on peut poser $\begin{cases} u^3 = \Lambda_1 \\ v^3 = \Lambda_2 \end{cases}$

Si $\Delta = 0$ l'équation $\Lambda^2 + q\Lambda - \frac{p^3}{27} = 0$ admet une solution double réelle :

$$\Lambda_0 = -\frac{q}{2}$$

On a alors $u^3 = v^3 = \Lambda_0$

Si $\Delta < 0$ l'équation $\Lambda^2 + q\Lambda - \frac{p^3}{27} = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées :

$$\Lambda_c = \frac{-q + i\sqrt{-\Delta}}{2} \text{ et } \overline{\Lambda}_c = \frac{-q - i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On a alors $\{u^3, v^3\} = \{\Lambda_c, \overline{\Lambda}_c\}$. Et par symétrie du problème, on peut poser $\begin{cases} u^3 = \Lambda_c \\ v^3 = \overline{\Lambda}_c \end{cases}$

- ④ Résumons l'étude qui a été faite :

— On cherche les solutions de $Z^3 + pZ + q = 0$.

Or $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$ implique que $u + v$ est solution de l'équation $Z^3 + pZ + q = 0$.

En effet, $(u+v)^3 = u^3 + v^3 + 3uv(u+v) = -q + 3\left(-\frac{p}{3}\right)(u+v) = -p(u+v) - q$

On est donc ramené à chercher les nombres complexes u et v tels que $(S_1) : \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases}$

— On a vu que (S₁) : $\begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ uv = -\frac{p}{3} \end{cases} \implies (S_2) : \begin{cases} u^3 + v^3 = -q \\ u^3 v^3 = -\frac{p^3}{27} \end{cases}$

D'autre part d'après le cours (S₂) $\iff u^3$ et v^3 sont solution de $\Lambda^2 + q\Lambda - \frac{p^3}{27} = 0$.

On a réussi à résoudre cette dernière équation, ce qui fournit u^3 et v^3 et donc (a priori) trois possibilités pour le nombre complexe u et trois possibilités pour le complexe v .

On obtient ainsi neuf candidats pour $u+v$ (pour une équation de degré 3). Mais parmi ceux-là, seuls conviennent ceux qui vérifie effectivement (S₁), c'est-à-dire ceux pour lesquels $uv = -\frac{p}{3}$.

Remarquons que par construction, le produit des racines obtenues vaut $-\frac{p^3}{27}$

Si $\Delta > 0$ on avait $u^3 = \Lambda_1 \in \mathbb{R}$ et $v^3 = \Lambda_2 \in \mathbb{R}$.

Notons $\lambda_1 = \sqrt[3]{\Lambda_1}$ et $\lambda_2 = \sqrt[3]{\Lambda_2}$.

On a $u \in \{\lambda_1, j\lambda_1, j^2\lambda_1\}$ et $v \in \{\lambda_2, j\lambda_2, j^2\lambda_2\}$.

NB : $\lambda_1\lambda_2 = \sqrt[3]{\Lambda_1\Lambda_2} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$

uv	λ_2	$j\lambda_2$	$j^2\lambda_2$
λ_1	$-\frac{p}{3}$	$-j\frac{p}{3}$	$-j^2\frac{p}{3}$
$j\lambda_1$	$-j\frac{p}{3}$	$-j^2\frac{p}{3}$	$-\frac{p}{3}$
$j^2\lambda_1$	$-j^2\frac{p}{3}$	$-\frac{p}{3}$	$-j\frac{p}{3}$

Les solutions de (S₁) sont (λ_1, λ_2) , $(j\lambda_1, j^2\lambda_2)$ et $(j^2\lambda_1, j\lambda_2)$. Il s'agit d'une solution réelle et deux solutions complexes conjuguées.

Ce qui fournit trois solutions pour $Z^3 + pZ + q = 0$: $\lambda_1 + \lambda_2$, $j\lambda_1 + j^2\lambda_2$, $j^2\lambda_1 + j\lambda_2$.

Si $\Delta = 0$ on avait $u^3 = v^3 = \Lambda_0$.

On note $\lambda_0 = \sqrt[3]{\Lambda_0}$. On a $u, v \in \{\lambda_0, j\lambda_0, j^2\lambda_0\}$.

Remarque : $\lambda_0^2 = \sqrt[3]{\Lambda_0^2} = \sqrt[3]{\left(\frac{-q^2}{2}\right)} = \sqrt[3]{\frac{q^2}{4}} = \sqrt[3]{-\frac{p^3}{27}} = -\frac{p}{3}$

NB : $q^2 = -\frac{4p^3}{27}$ car $\Delta = 0$.

uv	λ_0	$j\lambda_0$	$j^2\lambda_0$
λ_0	$-\frac{p}{3}$	$-j\frac{p}{3}$	$-j^2\frac{p}{3}$
$j\lambda_0$	$-j\frac{p}{3}$	$-j^2\frac{p}{3}$	$-\frac{p}{3}$
$j^2\lambda_0$	$-j^2\frac{p}{3}$	$-\frac{p}{3}$	$-j\frac{p}{3}$

Les solutions de (S₁) sont (λ_0, λ_0) , $(j\lambda_0, j^2\lambda_0)$ et $(j^2\lambda_0, j\lambda_0)$.

Ce qui fournit deux solutions pour $Z^3 + pZ + q = 0$:

$2\lambda_0$, et $j\lambda_0 + j^2\lambda_0 = -\lambda_0$ (solution double).

Si $\Delta > 0$ on avait $u^3 = \Lambda_c$ et $v^3 = \bar{\Lambda}_c$.

Notons λ_c l'une des racines cubiques de Λ_c .

On a $u \in \{\lambda_c, j\lambda_c, j^2\lambda_c\}$ et $v \in \{\bar{\lambda}_c, j\bar{\lambda}_c, j^2\bar{\lambda}_c\}$.

NB : $(\lambda_c\bar{\lambda}_c)^3 = \Lambda_c\bar{\Lambda}_c = -\frac{p^3}{27}$.

Or $\lambda_c\bar{\lambda}_c = |\lambda_c|^2$. Par conséquent, $|\lambda_c|^6 = -\frac{p^3}{27}$, et donc

$\lambda_c\bar{\lambda}_c = |\lambda_c|^2 = -\frac{p}{3}$.

uv	$\bar{\lambda}_c$	$j\bar{\lambda}_c$	$j^2\bar{\lambda}_c$
λ_c	$-\frac{p}{3}$	$-j\frac{p}{3}$	$-j^2\frac{p}{3}$
$j\lambda_c$	$-j\frac{p}{3}$	$-j^2\frac{p}{3}$	$-\frac{p}{3}$
$j^2\lambda_c$	$-j^2\frac{p}{3}$	$-\frac{p}{3}$	$-j\frac{p}{3}$

Les solutions de (S₁) sont $(\lambda_c, \bar{\lambda}_c)$, $(j\lambda_c, j^2\bar{\lambda}_c)$ et $(j^2\lambda_c, j\bar{\lambda}_c)$.

Ce qui fournit trois solutions pour $Z^3 + pZ + q = 0$: $\lambda_c + \bar{\lambda}_c$, $j\lambda_c + j^2\bar{\lambda}_c$, $j^2\lambda_c + j\bar{\lambda}_c$. Il s'agit de trois solutions réelles.

Pour finir, on avait : $az^3 + bz^2 + cz + d = 0 \iff Z^3 + pZ + q = 0$ avec $Z = z + \frac{b}{3a}$.

Il convient donc de retrancher $\frac{b}{3a}$ aux solutions de $Z^3 + pZ + q = 0$ pour obtenir les solutions de $az^3 + bz^2 + cz + d = 0$.

3 On cherche à résoudre $z^3 + 12z^2 + 42z + 44 = 0$.

On pose $Z = z + 4$.

$z^3 + 12z^2 + 42z + 44 = 0 \iff Z^3 - 6Z + 4 = 0$.

On cherche Z sous la forme $u + v$, u^3 et v^3 étant les solutions de : $\Lambda^2 + 4\Lambda + 8$.

Ici, $\Delta' = 4 - 8 = -4 = (2i)^2$.

Ainsi $u^3 = \Lambda_c = -2 + 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$ et $v^3 = \bar{\Lambda}_c = -2 - 2i = 2\sqrt{2}e^{\frac{-3i\pi}{4}}$.

On peut poser $\lambda_c = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} = 1 + i$ et $\bar{\lambda}_c = \sqrt{2}e^{\frac{-i\pi}{4}} = 1 - i$.

Les solutions de $Z^3 - 6Z + 4 = 0$ sont :

— $\lambda_c + \bar{\lambda}_c = 2$

— $j\lambda_c + j^2\bar{\lambda}_c = j(1+i) + j^2(1-i) = (j+j^2) + i(j-j^2) = -1 - \sqrt{3}$

— $j^2\lambda_c + j\bar{\lambda}_c = j^2(1+i) + j(1-i) = (j+j^2) + i(j^2-j) = -1 + \sqrt{3}$

Les solutions de $z^3 + 12z^2 + 42z + 44 = 0$ sont donc $2 - 4$, $-1 - \sqrt{3} - 4$, $-1 + \sqrt{3} - 4$.

$\mathcal{S} = \{-2, -5 - \sqrt{3}, -5 + \sqrt{3}\}$.