Nombres Complexes

De 14h00 à 17h00

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

En particulier, les résultats non encadrés et non justifiés ne seront pas pris en compte.

L'emploi d'une calculatrice est interdit

Exercice 1 : Montrer que $2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) = \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)$.

Exercice 2 :

1. Montrer que, $\forall x \in [-1\,;1]$, $\arccos x + \arcsin x = \frac{\pi}{2}$.
2. En précisant le domaine de validité, résoudre $\arccos x + \arcsin\left(x^2 - x + 1\right) = \frac{\pi}{2}$.

Exercice 3 : On rappelle la formule : $\forall \theta \in \mathbb{R}$, $e^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$.

1. Établir les formules d'Euler :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \qquad (1)\ \cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2}\,; \qquad (2)\ \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

2. En utilisant les formules d'Euler, linéariser (ou transformer le produit en somme) :

$$\forall\,(a;\,b) \in \mathbb{R}^2, \qquad (1)\ 2\cos a\cos b\,; \qquad (2)\ 2\sin a\sin b\,; \qquad (3)\ \cos^2 a\,; \qquad (4)\ \sin^2 a.$$

3. À l'aide de la formule $e^{\mathrm{i}x}e^{\mathrm{i}y} = e^{\mathrm{i}(x+y)}$, $(x;\,y) \in \mathbb{R}^2$, retrouver celles pour $\sin(x+y)$ et $\cos(x+y)$ en fonction de sinus et cosinus de x ou y.
   En déduire les formules de linéarisation de

$$\forall\,(x;\,y) \in \mathbb{R}^2, \qquad (1)\ \sin(2x)\,; \qquad (2)\ \cos(2x)\,; \qquad (3)\ \tan(2x).$$

4. À l'aide de la formule $\left(e^{\mathrm{i}x}\right)^n = e^{\mathrm{i}nx}$, établir la formule de Moivre :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + \mathrm{i}\sin(n\theta).$$

5. En utilisant la formule de Moivre, calculer $\cos(3x)$ et $\sin(3x)$ en fonction de $\sin x$ et $\cos x$.

Exercice 4 : Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est impaire.
3. Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.
4. Étudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
5. Déterminer l'équation de la tangente à la courbe de f en 0.
6. Après l'avoir justifié, tracer l'allure de la courbe représentative de f sur $\mathbb{R}$ tout entier.
7. Montrer que f admet une application réciproque f^{-1} définie sur $\mathbb{R}$ et préciser son sens de variation.
8. En résolvant l'équation $y = f(x)$, déterminer l'expression de f^{-1}.

Exercice 5 :

1. Mettre sous forme exponentielle les nombres complexes $1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$ et $1 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$.
   En déduire que, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^n}}\,\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right)$.
2. En déduire une expression simple, en fonction de n, du nombre rationnel :

$$\mathrm{A} = \binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{5} + \ldots + \frac{(-1)^p}{3^p}\binom{n}{2p-1}.$$