Nombres Complexes

Exercice 1 : Comparons $\cos\left(2\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\right)$ et $\cos\left(\arccos\left(-\dfrac{7}{9}\right)\right)$.

On a $\cos\left(2\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) = 2\cos^2\left(\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)\right) - 1 = \dfrac{2}{9} - 1 = -\dfrac{7}{9} = \cos\left(\arccos\left(-\dfrac{7}{9}\right)\right)$.

Les nombres $2\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right)$ et $\arccos\left(-\dfrac{7}{9}\right)$ sont donc égaux ou opposés modulo 2π *i.e.*

$$2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \equiv \arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\ [2\pi] \ \text{ ou } \ 2\arccos\left(\frac{1}{3}\right) \equiv -\arccos\left(-\frac{7}{9}\right)\ [2\pi].$$

Or, $0 < \dfrac{1}{3} < 1 \implies 0 < \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) < \dfrac{\pi}{2} \iff 0 < \arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) < \pi$.

Par définition, $\arccos\left(-\dfrac{7}{9}\right) \in [0\,;\pi]$, donc $2\arccos\left(\dfrac{1}{3}\right) = \arccos\left(-\dfrac{7}{9}\right)$.

Exercice 2 :

1. Pour $x = \pm 1$, la relation est claire.
Pour $x \in]-1\,;1[$, comme somme de fonctions dérivables, la fonction $\varphi : x \longmapsto \arccos x + \arcsin x$ est dérivable sur $]-1\,;1[$ et on a :

$$\forall x \in]-1\,;1[, \quad \varphi'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

La fonction φ est donc constante sur $]-1\,;1[$ à $\varphi(1) = \dfrac{\pi}{2}$, par exemple.

Conclusion, $\forall x \in [-1\,;1]$, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$.

2. Nécessairement, $x \in [-1\,;1]$. On peut alors appliquer la relation précédente *i.e.* $\arccos x = \dfrac{\pi}{2} - \arcsin x$.

$$\begin{aligned}
\arccos x + \arcsin\left(x^2 - x + 1\right) = \frac{\pi}{2} &\iff -\arcsin x + \arcsin\left(x^2 - x + 1\right) = 0 \\
&\iff \arcsin x = \arcsin\left(x^2 - x + 1\right) \\
&\iff x = x^2 - x + 1 \\
&\iff (x-1)^2 = 0 \\
&\iff x = 1.
\end{aligned}$$

Réciproquement, $x = 1 \in [-1\,;1]$ et $x^2 - x + 1 = 1^2 - 1 + 1 = 1 \in [-1\,;1]$ donc $x = 1$ convient comme solution.

Exercice 3 :

1. On a $1 + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ et $1 - \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} = \overline{\left(1 + \dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}e^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$.

On a alors : $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n &= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \left(e^{n\mathrm{i}\frac{\pi}{6}} - e^{-n\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right) && \text{(VI.1)} \\
&= \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n \times 2\mathrm{i}\sin\left(n\tfrac{\pi}{6}\right) \\
&= \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^n}}\,\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right). && \text{(VI.2)}
\end{aligned}$$

2. Développons l'expression (VI.1) à l'aide du binôme de Newton : $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n - \left(1 - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^k - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^k\left(1 - (-1)^k\right)
\end{aligned}$$

Or, $\left(1 - (-1)^k\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } k \text{ pair} \\ 2 \text{ si } k \text{ impair} \end{cases}$

$$= 2\left(\binom{n}{1}\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}} + \binom{n}{3}\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^3 + \binom{n}{5}\left(\frac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^5 + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \begin{array}{ll} \left(\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^n & \text{si } n \text{ est impair,} \\ \dbinom{n}{n-1}\left(\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\right)^{n-1} & \text{si } n \text{ est pair.} \end{array}\right)$$

$$= 2\left(\binom{n}{1}\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{i} - \binom{n}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3\mathrm{i} + \binom{n}{5}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^5\mathrm{i} + \ldots\right.$$
$$\left.\ldots + \begin{array}{ll} (-1)^p\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2p+1}\mathrm{i} & \text{si } n = 2p+1 \text{ est impair,} \\ (-1)^p\dbinom{2p}{2p-1}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{2p-1}\mathrm{i} & \text{si } n = 2p \text{ est pair.} \end{array}\right)$$

En factorisant par $\dfrac{\mathrm{i}}{\sqrt{3}}$,

$$= \frac{2\mathrm{i}}{\sqrt{3}}\left(\binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{5} + \ldots + \frac{(-1)^p}{3^p}\binom{n}{2p-1}\right).$$

D'après la relation (VI.2), on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathrm{A} &= \binom{n}{1} - \frac{1}{3}\binom{n}{3} + \frac{1}{3^2}\binom{n}{5} + \ldots + \frac{(-1)^p}{3^p}\binom{n}{2p-1} = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3^n}}\,\mathrm{i}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) \times \frac{\sqrt{3}}{2\mathrm{i}} \\
&= \frac{2^n}{\sqrt{3^{n-1}}}\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{3}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^n\sin\left(n\frac{\pi}{6}\right).
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

1. Pour tout réel θ, en sommant ou retranchant deux à deux les équations du système

$$\begin{cases} e^{\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta \\ e^{-\mathrm{i}\theta} &= \cos\theta - \mathrm{i}\sin\theta \end{cases},$$

on obtient :

$$\cos\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} + e^{-\mathrm{i}\theta}}{2} \quad \text{et} \quad \sin\theta = \frac{e^{\mathrm{i}\theta} - e^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}. \qquad \text{(VI.3)}$$

2. Ce n'est pas le plus efficace mais, en accord avec l'énoncé et les relations (VI.3), $\forall\,(a;\,b) \in \mathbb{R}^2$, on a successivement :

(1) $$\begin{aligned}2\cos a\cos b &= 2\left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)\times\left(\frac{e^{ib}+e^{-ib}}{2}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}+e^{i(a-b)}+e^{-i(a-b)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos(a+b)+2\cos(a-b)\right)\\ &= \cos(a+b)+\cos(a-b).\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}2\sin a\sin b &= 2\left(\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)\times\left(\frac{e^{ib}-e^{-ib}}{2i}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(e^{i(a+b)}+e^{-i(a+b)}-e^{i(a-b)}-e^{-i(a-b)}\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(2\cos(a+b)-2\cos(a-b)\right)\\ &= \cos(a+b)-\cos(a-b).\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\cos^2 a &= \left(\frac{e^{ia}+e^{-ia}}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\left(e^{2ia}+e^{-2ia}+2e^{i(a-a)}\right)\\ &= \frac{1}{4}\left(2\cos(2a)+2\right)\\ &= \frac{1+\cos(2a)}{2}.\end{aligned}$$

(4) $$\begin{aligned}\sin^2 a &= \left(\frac{e^{ia}-e^{-ia}}{2i}\right)^2 = -\frac{1}{4}\left(e^{2ia}+e^{-2ia}-2e^{i(a-a)}\right)\\ &= -\frac{1}{4}\left(2\cos(2a)-2\right)\\ &= \frac{1-\cos(2a)}{2}.\end{aligned}$$

3. Pour tout $(x;\,y)\in\mathbb{R}^2$, on a :

$$\begin{aligned}e^{i(x+y)} &= e^{ix}e^{iy}\\ \cos(x+y)+i\sin(x+y) &= (\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\ &= \cos x\cos y-\sin x\sin y+i(\cos x\sin y+\cos y\sin x).\end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on a alors :

$$\begin{aligned}\forall\,(x;\,y)\in\mathbb{R}^2,\ \cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y.\\ \sin(x+y) &= \cos x\sin y+\cos y\sin x.\end{aligned}$$

Pour $x=y$, on a :

$$\begin{aligned}\forall x\in\mathbb{R},\ \cos(2x) &= \cos^2 x-\sin^2 x = 2\cos^2 x-1.\\ \sin(2x) &= 2\cos x\sin x.\\ \text{Si } x\not\equiv\frac{\pi}{4}\left[\frac{\pi}{2}\right],\quad \tan(2x) &= \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)} = \frac{2\cos x\sin x}{\cos^2 x-\sin^2 x} = \frac{2\cancel{\cos^2 x}\tan x}{\cancel{\cos^2 x}(1-\tan^2 x)}\\ &= \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}\end{aligned}$$

4. Soit $\theta\in\mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\left(e^{i\theta}\right)^n &= e^{in\theta}\\ (\cos\theta+i\sin\theta)^n &= \cos(n\theta)+i\sin(n\theta).\end{aligned}$$

5. Pour $\theta\in\mathbb{R}$, d'après la formule de Moivre, on a :

$$\begin{aligned}e^{i3\theta} &= \left(e^{i\theta}\right)^3\\ \cos(3\theta)+i\sin(3\theta) &= (\cos\theta+i\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta+3i\cos^2\theta\sin\theta-3\cos\theta\sin^2\theta-i\sin^3\theta.\end{aligned}$$

En identifiant partie réelle et imaginaire, on obtient :

$$\begin{aligned}\cos(3\theta) &= \cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta\\ &= 4\cos^3\theta-3\cos\theta.\\ \sin(3\theta) &= 3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta\\ &= 3\theta\sin\theta-4\sin^3\theta\end{aligned}$$

Exercice 5 :

1. Comme pour tout réel x, on a $x^2+1\geqslant 1>0$, la fonction $x\longmapsto\sqrt{x^2+1}$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
De plus, $\forall x\to\mathbb{R}$, $\sqrt{x^2+1}>\sqrt{x^2}=|x|$, $x+\sqrt{x^2+1}>0$.
La fonction f est donc définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x\in\mathbb{R}$. $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et on a :

$$f(-x)=\ln\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)=\ln\left(\frac{\cancel{x^2}+1-\cancel{x^2}}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=\ln\left(\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\right)=-f(x).$$

Donc f est impaire.
On réduit donc l'intervalle d'étude à $\mathbb{R}_+$ et on complètera l'étude par symétrie centrale par rapport à l'origine.

3. D'après les théorèmes sur les limites de sommes et de composées, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

4. D'après la première question, f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$f'(x)=\frac{1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}>0 \text{ sur } [0\,;+\infty[. \qquad \text{(On a juste besoin du signe)}$$

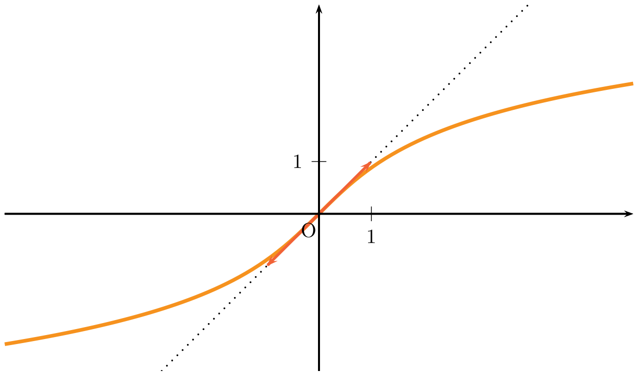
Par imparité, on en déduit que f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

5. La fonction f étant dérivable en 0, on trouve :

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}_0):\ y &= f'(0)(x-0)+f(0)\\ &= x.\end{aligned}$$

6 Par imparité, on trace la courbe sur $\mathbb{R}_+$ puis on complète par symétrie centrale sur $\mathbb{R}$ tout entier.



7 La fonction f est continue et strictement croissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc elle y établit une bijection de réciproque notée f^{-1}.
La fonction f étant strictement croissante, f^{-1} l'est également de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

8 Soit $(x;\, y) \in \mathbb{R}$ tel que $y = f(x)$. Alors, on a :

$$\begin{aligned} y = f(x) &\iff y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \iff e^y = x + \sqrt{x^2+1} \\ &\iff e^y - x = \sqrt{x^2+1} \iff \left(e^y - x\right)^2 = x^2 + 1 \\ &\iff -2xe^y = 1 - e^{2y} \iff x = \frac{e^{2y}-1}{2e^y} \\ &\iff x = \frac{e^y - e^{-y}}{2}. \end{aligned}$$

On reconnait $f^{-1} : x \longmapsto \sinh x$.