Fonctions hyperboliques

Exercice 1 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. On pose $f(x) = e^{\sinh x} - x - 1$ et pour tout $n \geqslant 2$:

$$\mathrm{S}_n = \sum_{k=n}^{np} \sinh \frac{1}{k}$$

1. Montrer que, pour tout réel x, $\operatorname{ch}^2 x + \sinh x \geqslant 0$.
2. Étudier les variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
3. Démontrer que $\forall x \in]0,1[,\ 1 + x \leqslant e^{\sinh x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
4. En déduire que $\forall n \geqslant 2,\ \ln \dfrac{np+1}{n} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant -\ln \dfrac{n-1}{np}$.
5. Déterminer alors la limite de S_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2 :

1. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^\star, \quad \tanh(x) = \dfrac{2}{\tanh(2x)} - \dfrac{1}{\tanh(x)}$.
2. Pour $a \in \mathbb{R}^\star$ et $n \in \mathbb{N}$, en déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh(2^k a)$.

Exercice 3 : On considère le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct. A tout nombre complexe z, différent de i, on associe le nombre complexe Z défini par :

$$\mathrm{Z} = \frac{z+1}{z-i}$$

On pose $z = x + iy$, où x et y désignent les parties réelle et imaginaire de z.

1. Calculer, en fonction de x et y, la partie réelle et la partie imaginaire de Z.
2. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel.
3. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur.
4. Tracer les ensembles E_1 et E_2.