Fonctions hyperboliques

Exercice 1 :

1. Soit $\phi : x \mapsto \cosh^2 x + \sinh x$.
ϕ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \phi'(x) = (2\sinh x + 1)\cosh x$.
ϕ est décroissante sur $\left]-\infty, -\operatorname{argsinh}\dfrac{1}{2}\right]$ et croissante sur $\left[-\operatorname{argsinh}\dfrac{1}{2}, +\infty\right[$.
Son minimum est alors :
$f\left(-\operatorname{argsinh}\dfrac{1}{2}\right) = \cosh^2\left(\operatorname{argsinh}\dfrac{1}{2}\right) + \sinh\left(-\operatorname{argsinh}\dfrac{1}{2}\right) = 1 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{4} > 0.$
On a bien :
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \cosh^2 x + \sinh x \geqslant 0.$$

2. $\forall x \in \mathbb{R}$, on a $f'(x) = \cosh(x)e^{\sinh x} - 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f''(x) = (\cosh^2 x + \sinh x)e^{\sinh x}$.
D'après la question 1, f' est croissante.
Or, $f'(0) = 0$.
On en déduit donc le signe de f'.
   - Sans difficulté, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.
   - En $+\infty$, $f(x) = x\left(\dfrac{e^{\sinh x}}{x} - 1\right) - 1$.
   Or, $\dfrac{e^{\sinh x}}{x} = \dfrac{e^{\sinh x}}{\sinh x}\dfrac{\sinh x}{x}$ et les deux facteurs tendent vers $+\infty$ $\left(\text{le deuxième car } \dfrac{\sinh x}{x} \geqslant \dfrac{e^x}{2x}\right)$.
   Par conséquent, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

On a donc :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3. Comme, $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) \geqslant 0$, on en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{\sinh x} \geqslant x + 1$.
D'autre part, en appliquant la relation en $-x$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^{-\sinh x} \geqslant 1 - x$.
Pour $x < 1$, en passant à l'inverse, $e^{\sinh x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.
En particulier, $\forall x \in]0,1[, \quad 1 + x \leqslant e^{\sinh x} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$.

4. Les inégalités précédentes étant strictement positives, on peut composer par le logarithme, fonction croissante, pour avoir $\forall x \in]0,1[$, $\ln(1+x) \leqslant \sinh x \leqslant -\ln(1-x)$.
Pour $k > 1$, on applique l'inégalité précédente avec $x = \dfrac{1}{k}$:
$$\forall k > 1, \quad \ln\frac{k+1}{k} \leqslant \sinh\frac{1}{k} \leqslant -\ln\frac{k-1}{k}.$$
On a donc, pour $n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=n}^{np+1} \ln\frac{k+1}{k} \leqslant \sum_{k=n}^{np+1} \sinh\frac{1}{k} \leqslant \sum_{k=n}^{np+1} -\ln\frac{k-1}{k}$.

En simplifiant :
$$\ln\frac{np+1}{n} \leqslant \mathrm{S}_n \leqslant -\ln\frac{n-1}{np+1}.$$

5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln\dfrac{np+1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln\left(p + \dfrac{1}{n}\right) = \ln p$.
De même, $\lim\limits_{n\to+\infty} -\ln\dfrac{n-1}{np+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\ln\dfrac{1-\frac{1}{n}}{p+\frac{1}{n}} = -\ln\dfrac{1}{p} = \ln p$.
Par encadrement, on en déduit alors :
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{S}_n = \ln p.$$

Exercice 2 :

1. $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $\dfrac{2}{\tanh(2x)} - \dfrac{1}{\tanh(x)} = \cancel{2}\dfrac{1+\tanh^2(x)}{\cancel{2}\tanh(x)} - \dfrac{1}{\tanh(x)} = \dfrac{\tanh^{\cancel{2}}(x)}{\cancel{\tanh(x)}} = \tanh x$.

2. On utilise la formule ci-dessus pour $x = 2^k a \neq 0$:
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n} 2^k \tanh(2^k a) &= \sum_{k=0}^{n} 2^k\left(\frac{2}{\tanh(2^{k+1}a)} - \frac{1}{\tanh(2^k a)}\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{2^{k+1}}{\tanh(2^{k+1}a)} - \frac{2^k}{\tanh(2^k a)}\right) \qquad \text{(on reconnait une somme télescopique)}\\ &= \frac{2^{n+1}}{\tanh(2^{n+1}a)} - \frac{1}{\tanh(a)}.\end{aligned}$$

Exercice 3 :

1. $\mathrm{Z} = \dfrac{z+1}{z-i} = \dfrac{(x+1)+iy}{x+i(y-1)} = \dfrac{[(x+1)+iy][x-i(y-1)]}{[x+i(y-1)][x-i(y-1)]}$
$= \dfrac{(x+1)x + y(y-1)}{x^2+(y-1)^2} + \mathrm{i}\,\dfrac{xy-(x+1)(y-1)}{x^2+(y-1)^2}$
Donc,
$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{Z}) = \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2} \quad \text{et } \mathrm{Im}\,(\mathrm{Z}) = \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2}$$

2. E_1 : ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit réel.
Soit z différent de i.
$$\begin{aligned}\mathrm{M}(z) \in \mathrm{E}_1 &\iff \mathrm{Z} \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}\ \mathrm{Z}) = 0 \iff \frac{x-y+1}{x^2+(y-1)^2} = 0\\ &\iff x - y + 1 = 0 \text{ car } x^2 + (y-1)^2 \neq 0\end{aligned}$$
E_1 est donc la droite d'équation $x - y + 1 = 0$, privée du point A d'affixe i.

3. E_2 : ensemble des points M du plan complexe d'affixe z tels que Z soit imaginaire pur

Soit z différent de i.

$$\begin{aligned}
\mathrm{M}(z) \in \mathrm{E}_2 &\iff \mathrm{Z} \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}\,(\mathrm{Z}) = 0 \iff \frac{x^2+y^2+x-y}{x^2+(y-1)^2} = 0 \\
&\iff x^2+y^2+x-y = 0 \text{ car } x^2+(y-1)^2 \neq 0 \\
&\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = 0 \\
&\iff \left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 \\
&\iff (x-x_\Omega)^2 + (y-y_\Omega)^2 = \mathrm{R}^2 \text{ en posant } \begin{cases} \Omega\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right) \\ \mathrm{R} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \\
&\iff \Omega\mathrm{M} = \mathrm{R}
\end{aligned}$$

E_2 est donc le cercle de centre Ω d'affixe $\dfrac{-1+i}{2}$ et de rayon $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ privé du point A d'affixe i.