Trigonométrie & Calcul intégral

Exercice 1 : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note :

$$\mathrm{A} = \sum_{0 \leqslant 3p \leqslant n} \binom{n}{3p} \qquad \mathrm{B} = \sum_{0 \leqslant 3p+1 \leqslant n} \binom{n}{3p+1} \qquad \mathrm{C} = \sum_{0 \leqslant 3p+2 \leqslant n} \binom{n}{3p+2}$$

On rappelle que $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$ est une des racines du polynôme $x \longmapsto 1 + z + z^2$.

1. Simplifier l'écriture de $(1+j)^n$. En déduire l'expression simplifiée de $(1+j^2)^n$.
2. Pour $z \in \mathbb{C}$, développer l'expression $(1+z)^n$.
3. En remplaçant successivement z par 1, j et j^2, en déduire un système vérifié par A, B et C.
4. En déduire les expressions de A, B et C.

Exercice 2 :

1. Calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t$ pour $(p;\, q) \in \mathbb{Z}^2$.
2. **Reproduire** et compléter le tableau suivant :

$\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t = \dots$	$\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = \dots$
$\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t = \dots$	$\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_1^{e} \frac{\cos(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = \dots$
$\mathrm{I}_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \dots$	$\mathrm{I}_6 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \dots$
$\mathrm{I}_7 = \displaystyle\int_{-1}^{1} \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \dots$	$\mathrm{I}_8 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \dots$
$\mathrm{I}_9 = \displaystyle\int_2^{1} t^2(1-\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t = \dots$	$\mathrm{F}_{10}(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \dots$
$\mathrm{F}_{11}(x) = \displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}+1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dots$	$\mathrm{I}_{12} = \displaystyle\int_0^{1} t^2 e^t\,\mathrm{d}t = \dots$
$\mathrm{I}_{13} = \displaystyle\int_1^{e} t^2\ln t\,\mathrm{d}t = \dots$	$\mathrm{F}_{14}(x) = \displaystyle\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x = \dots$
$\mathrm{F}_{15}(x) = \displaystyle\int x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x = \dots$	$\mathrm{I}_{16} = \displaystyle\int_0^{1} te^t\sin t\,\mathrm{d}t = \dots$