Trigonométrie & Calcul intégral

Exercice 1 :

1. Par définition, $1+j+j^2=0$ *i.e.* $1+j=-j^2$.

   On a alors : $(1+j)^n = \left(-e^{\frac{4i\pi}{3}}\right)^n = \left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right)^n = e^{i\frac{n\pi}{3}}$.

   De même, $1+j^2=-j$ puis $(1+j^2)^n = \left(-e^{\frac{2i\pi}{3}}\right)^n = \left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)^n = e^{-i\frac{n\pi}{3}}$.

2. D'après la formule du binôme, on a :

$$\forall z \in \mathbb{C},\ (1+z)^n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} z^p$$

Les entiers de la forme $3p$, $3p+1$ et $3p+2$ formant une partition de $\mathbb{N}$, on a ;

$$= \sum_{0\leqslant 3p\leqslant n} \binom{n}{3p} z^{3p} + \sum_{0\leqslant 3p+1\leqslant n} \binom{n}{3p+1} z^{3p+1} + \sum_{0\leqslant 3p+2\leqslant n} \binom{n}{3p+2} z^{3p+2}$$

3. En remplaçant successivement z par 1, j et j^2 dans l'expression précédente et en utilisant le fait que $j^3=1$, A, B et C sont solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & + & \mathrm{C} & = & 2^n \\ \mathrm{A}j^{3p} & + & \mathrm{B}j^{3p+1} & + & \mathrm{C}j^{3p+2} & = & (1+j)^n \\ \mathrm{A}j^{6p} & + & \mathrm{B}j^{6p+2} & + & \mathrm{C}j^{6p+4} & = & (1+j^2)^n \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccccc} \mathrm{A} & + & \mathrm{B} & + & \mathrm{C} & = & 2^n \\ \mathrm{A} & + & j\mathrm{B} & + & j^2\mathrm{C} & = & e^{i\frac{n\pi}{3}} \\ \mathrm{A} & + & j^2\mathrm{B} & + & j\mathrm{C} & = & e^{-i\frac{n\pi}{3}} \end{array}\right.$$

4. Comme $1+j+j^2=0$, en sommant les lignes du système précédent, on a :

$$\mathrm{A} = \frac{1}{3}\left(2^n + e^{i\frac{n\pi}{3}} + e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3}\Big(2^n + 2\cos\left(\tfrac{n\pi}{3}\right)\Big).$$

En multipliant la deuxième ligne par j^2, la troisième par j et en sommant les lignes, on a encore :

$$\begin{aligned}\mathrm{B} &= \frac{1}{3}\left(2^n + j^2 e^{i\frac{n\pi}{3}} + je^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + e^{i\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{n\pi}{3}-\frac{2\pi}{3}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\tfrac{n\pi}{3}-\tfrac{2\pi}{3}\right)\right).\end{aligned}$$

Enfin, multipliant la deuxième ligne par j, la troisième par j^2 et en sommant les lignes, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathrm{C} &= \frac{1}{3}\left(2^n + je^{i\frac{n\pi}{3}} + j^2 e^{-i\frac{n\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3}\left(2^n + e^{i\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)} + e^{-i\left(\frac{n\pi}{3}+\frac{2\pi}{3}\right)}\right) \\ &= \frac{1}{3}\left(2^n + 2\cos\left(\tfrac{n\pi}{3}+\tfrac{2\pi}{3}\right)\right).\end{aligned}$$

Exercice 2 :

1. Soient $(p;\, q) \in \mathbb{Z}^2$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a :

$$\begin{aligned}\cos(pt)\sin(qt) &= \frac{e^{ipt}+e^{-ipt}}{2} \times \frac{e^{iqt}-e^{-iqt}}{2i} = \frac{e^{i(p+q)t} - e^{i(p-q)t} + e^{-i(p-q)t} - e^{-i(p+q)t}}{2\times 2i} \\ &= \frac{1}{2}\left[\sin(p+q)t - \sin(p-q)t\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(p+q)t + \sin(q-p)t\right]\end{aligned}$$

Plusieurs cas se présentent :

- Si $q=0$, alors $\forall t \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(pt)\sin(qt)=0$ et $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t = 0$;
- Si $q \neq 0$,
  - Si $p=q$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2qt}{2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos 2qt}{4q}\right]_0^{2\pi} = 0$ car $q \in \mathbb{Z}$;
  - Si $p=-q$, alors $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2qt}{2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{\cos 2qt}{4q}\right]_0^{2\pi} = 0$ car $q \in \mathbb{Z}$;
  - Si $p \in \mathbb{Z} \setminus \{q, -q\}$, alors

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\sin(p+q)t}{2} + \frac{\sin(q-p)t}{2}\right)\mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{\cos(p+q)t}{2(p+q)} - \frac{\cos(q-p)t}{2(q-p)}\right]_0^{2\pi} = 0 \quad \text{car } q+p,\, q-p \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Finalement, $\boxed{\forall\,(p;\, q) \in \mathbb{Z}^2, \quad \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(pt)\sin(qt)\,\mathrm{d}t = 0}$

2.

$\mathrm{I}_1 = 1 - \frac{\pi}{4}$	$\mathrm{I}_2 = \frac{\pi}{4}$
$\mathrm{I}_3 = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$	$\mathrm{I}_4 = \sin 1$
$\mathrm{I}_5 = \frac{1}{2}$	$\mathrm{I}_6 = \frac{\pi}{16}$
$\mathrm{I}_7 = \frac{\pi}{2}$	$\mathrm{I}_8 = 0$
$\mathrm{I}_9 = -\frac{79}{30} + \frac{3}{10}2^{\frac{10}{3}}$	$\mathrm{F}_1(x) = \frac{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$
$\mathrm{F}_2(x) = 2\sqrt{x} + \ln\lvert x+1\rvert$	$\mathrm{I}_{10} = e-2$
$\mathrm{I}_{11} = \frac{2e^3+1}{9}$	$\mathrm{F}_3(x) = x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$
$\mathrm{F}_4(x) = \frac{x^2+1}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$	$\mathrm{I}_{12} = \frac{e\sin 1 - 1}{2}$

Avant chacune des intégrations par parties nécessaires, on vérifiera bien que chaque fonction qui est dérivée est au moins de classe $\mathcal{C}^1$ sur les intervalles concernés.

(1) $\mathrm{I}_1 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \left(1+\tan^2 t - 1\right)\mathrm{d}t = [\tan t - t]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4}$;

(2) $\mathrm{I}_2 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin t}{\cos^2 t + 1}\,\mathrm{d}t = [-\arctan(\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\arctan 0 + \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$;

3. $\mathrm{I}_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\sqrt{1+\sin t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{2}{3}(1+\sin t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)$;

4. $\mathrm{I}_4 = \displaystyle\int_1^e \frac{\cos(\ln t)}{t}\,\mathrm{d}t = [\sin(\ln t)]_1^e = \sin 1$;

5. $\mathrm{I}_5 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan t}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{2}\tan^2 t\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2}$;

6. $\mathrm{I}_6 = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^4 t\cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{32}\int_0^{\pi}(\cos 6t - 2\cos 4t - \cos 2t + 2)\,\mathrm{d}t$;

$= \dfrac{1}{32}\left[\dfrac{\sin 6t}{6} - 2\dfrac{\sin 4t}{4} - \dfrac{\sin 2t}{2} + 2t\right]_0^{\pi} = \dfrac{\pi}{16}$

7. **Première méthode** :

$y = \sqrt{1-t^2}$ est l'équation du demi-cercle trigonométrique donc $\mathrm{I}_7 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ est l'aire du demi-disque trigonométrique.

D'où $\mathrm{I}_7 = \dfrac{1}{2}\times 2\pi\times 1 = \dfrac{\pi}{2}$.

Deuxième méthode :

$\mathrm{I}_7 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{IPP}}{=} \left[t\sqrt{1-t^2}\right]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} t\frac{-2t}{2\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = \int_{-1}^{1}\frac{t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

$= \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t + \int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$

Or $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{t^2-1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}\frac{1-t^2}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = -\int_{-1}^{1}\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\mathrm{I}_7$.

On a donc $\mathrm{I}_7 = -\mathrm{I}_7 + \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t$, d'où $2\mathrm{I}_7 = \displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t = [\arcsin t]_{-1}^{1}$.

$= \arcsin(1) - \arcsin(-1) = \pi$

Finalement, $\mathrm{I}_7 = \dfrac{\pi}{2}$.

8. **Première méthode** :

$t \mapsto t\sqrt{1-t^2}$ est impaire.

Comme on intègre sur $[-1,1]$, symétrique par rapport à 0, $\mathrm{I}_8 = 0$.

Deuxième méthode :

$\mathrm{I}_8 = \displaystyle\int_{-1}^{1} t\sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{-1}{3}(1-t^2)^{\frac{3}{2}}\right]_{-1}^{1} = 0$

9. $\mathrm{I}_9 = \displaystyle\int_2^1 t^2(1-\sqrt[3]{t})\,\mathrm{d}t = \int_2^1 (t^2 - t^{\frac{7}{3}})\,\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{3}{10}t^{\frac{10}{3}}\right]_2^1$;

$= \left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{3}{10}\right) - \left(\dfrac{8}{3} - \dfrac{3}{10}2^{\frac{10}{3}}\right) = -\dfrac{79}{30} + \dfrac{3}{10}2^{\frac{10}{3}}$

10. $\mathrm{F}_1(x) = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}^2-\sqrt{x-1}^2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}\,\mathrm{d}x$;

$= \dfrac{1}{3}(x+1)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{1}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} = \dfrac{(x+1)\sqrt{x+1}-(x-1)\sqrt{x-1}}{3}$

11. $\mathrm{F}_2(x) = \displaystyle\int \frac{x+\sqrt{x}+1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x+1)+\sqrt{x}}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \int\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x = 2\sqrt{x}+\ln|x+1|$;

12. $\mathrm{I}_{10} = \displaystyle\int_0^1 t^2e^t\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{IPP}}{=} \left[t^2e^t\right]_0^1 - \int_0^1 2te^t\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{IPP}}{=} e - \left(\left[2te^t\right]_0^1 - \int_0^1 2e^t\,\mathrm{d}t\right)$

$= e - \left(2e - \left[2e^t\right]_0^1\right) = e - (2e - (2e-2)) = e-2$

13. $\mathrm{I}_{11} = \displaystyle\int_1^e t^2\ln t\,\mathrm{d}t \underset{\mathrm{IPP}}{=} \left[\frac{t^3}{3}\ln t\right]_1^e - \int_1^e \frac{t^3}{3}\times\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \frac{e^3}{3} - \int_1^e \frac{t^2}{3}\,\mathrm{d}t = \frac{e^3}{3} - \left[\frac{t^3}{9}\right]_1^e$;

$= \dfrac{e^3}{3} - \left(\dfrac{e^3}{9} - \dfrac{1}{9}\right) = \dfrac{2e^3+1}{9}$

14. $\mathrm{F}_3(x) = \displaystyle\int \arcsin^2 x\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{IPP}}{=} \left[x\arcsin^2 x\right] - \int \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x\,\mathrm{d}x$

$\underset{\mathrm{IPP}}{=} x\arcsin^2 x - \left(\left[-2\sqrt{1-x^2}\arcsin x\right] - \displaystyle\int -2\sqrt{1-x^2}\times\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x\right)$

$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - \displaystyle\int 2\,\mathrm{d}x$

$= x\arcsin^2 x + 2\sqrt{1-x^2}\arcsin x - 2x$

15. $\mathrm{F}_4(x) = \displaystyle\int x\arctan^2 x\,\mathrm{d}x \underset{\mathrm{IPP}}{=} \left[\frac{x^2}{2}\arctan^2 x\right] - \int \frac{x^2}{2}\times\frac{2\arctan x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan^2 x - \displaystyle\int \frac{x^2}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan^2 x - \displaystyle\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan^2 x - \displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x + \int \frac{1}{1+x^2}\arctan x\,\mathrm{d}x$

$\underset{\mathrm{IPP}}{=} \dfrac{x^2}{2}\arctan^2 x - \left([x\arctan x] - \displaystyle\int \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right) + \left[\frac{1}{2}\arctan^2 x\right]$

$= \dfrac{x^2}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \left[\dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)\right] + \dfrac{1}{2}\arctan^2 x$

$= \dfrac{x^2+1}{2}\arctan^2 x - x\arctan x + \dfrac{1}{2}\ln(1+x^2)$

16. $\mathrm{I}_{12} = \displaystyle\int_0^1 te^t\sin t\,\mathrm{d}t = \int_0^1 te^t\mathrm{Im}\,(e^{it})\,\mathrm{d}t = \mathrm{Im}\left(\int_0^1 te^{(1+i)t}\,\mathrm{d}t\right)$

$\underset{\mathrm{IPP}}{=} \mathrm{Im}\left(\left[t\dfrac{e^{(1+i)t}}{1+i}\right]_0^1 - \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{(1+i)t}}{1+i}\,\mathrm{d}t\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{1+i}}{1+i} - \left[\dfrac{e^{(1+i)t}}{(1+i)^2}\right]_0^1\right)$

$= \mathrm{Im}\left(\dfrac{e^{1+i}}{1+i} - \dfrac{e^{(1+i)}-1}{2i}\right) = \mathrm{Im}\left(\dfrac{e(\cos 1 + i\sin 1)(1-i)}{2} + i\dfrac{e(\cos 1 + i\sin 1)-1}{2}\right)$

$= \mathrm{Im}\left(\dfrac{e(\cos 1 + i\sin 1 - i\cos 1 + \sin 1) + ei\cos 1 - e\sin 1 - i}{2}\right)$

$= \dfrac{e\sin 1 - 1}{2}$