Équation différentielle à coefficients non constants

On s'intéresse ici à la résolution sur $\mathrm{I} =]0\,;+\infty[$, de l'équation différentielle :

$$y'' - \frac{2x}{1+x^2}y' + \frac{2}{1+x^2}y = (1+x^2)\ln x. \tag{E}$$

On notera (E_0) l'équation homogène associée.

I. Calculs préliminaires :

1. Montrer qu'il existe des réels $(a;\, b;\, c) \in \mathbb{R}^3$ tels que :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{1}{x(x^2+1)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{1+x^2}.$$

2. En déduire une primitive de $f : x \longmapsto \dfrac{2}{x(1+x^2)}$ sur I.
3. Vérifier que $\mathrm{G} : x \longmapsto \left(x - \dfrac{1}{3}x^3\right)\ln x - x + \dfrac{1}{9}x^3$ est une primitive sur I de la fonction $g : x \longmapsto g(x) = (1-x^2)\ln x$.
4. Donner une primitive de $h : x \longmapsto x\ln x$ sur I.

II. Résolution de l'équation homogène associée :

5. Montrer que $y_1 : x \longmapsto x$ est solution de (E_0).
6. Soit $y : \mathrm{I} \longmapsto \mathbb{R}$ deux fois dérivable. On pose

$$z : \begin{array}{ccc} \mathrm{I} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \dfrac{y(x)}{x} \end{array}.$$

Montrer que y est solution de (E_0) si, et seulement si z' est solution de l'équation différentielle :

$$xu'(x) + \frac{2}{1+x^2}u(x) = 0. \tag{E'}$$

7. Résoudre l'équation différentielle (E').
8. En déduire l'ensemble des solutions de (E_0).

III. Résolution de l'équation (E) :

9. On cherche une solution particulière de (E) sous la forme

$$y_p(x) : x \longmapsto \lambda(x)x + \mu(x)(x^2-1),$$

où λ et μ sont deux fonctions deux fois dérivables de I dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ x\lambda'(x) + (x^2-1)\mu'(x) = 0. \tag{Lag_1}$$

   a) Exprimer y_p' et y_p'' en fonction de λ et μ.

   b) Montrer que y_p est solution de (E) si, et seulement si

$$\forall\, x \in \mathrm{I},\ \lambda'(x) + 2x\mu'(x) = (x^2+1)\ln x. \tag{Lag_2}$$

   c) À l'aide des relations (Lag_1) et (Lag_2), déterminer λ' et μ'.

   d) En déduire une expression des fonctions λ et μ puis d'une solution particulière de (E).

10. Donner l'ensemble des solutions de (E).