Nombres réels

Exercice 1 :

1 Centrale PC : Soit $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Soit (E) : $y'(x) = y(x)\tan x - \cos^2 x$.

Les fonctions tan et $x \mapsto -\cos^2 x$ sont continues sur I : on peut appliquer le cours.

— *Résolution de l'ELHA* (E_0) : $y'(x) - y(x)\tan x = 0$.

La solution générale de (E_0) est $x \mapsto ke^{-\ln|\cos x|}$, i.e. $x \mapsto \frac{k}{\cos x}$, avec $k \in \mathbb{R}$.

— *Méthode de variation de la constante.* On cherche une solution particulière sous la forme $y : x \mapsto \frac{k(x)}{\cos x}$ avec k une fonction dérivable sur I.

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de (E)} &\iff \forall x \in I,\ y'(x) = y(x)\tan x - \cos^2 x \\ &\iff \forall x \in I,\ \frac{k'(x)}{\cos x} = -\cos^2 x \\ &\iff \forall x \in I,\ k'(x) = -\cos^3 x \\ &\iff \forall x \in I,\ k'(x) = -\cos x + \cos x \sin^2 x \end{aligned}$$

On choisit $k : x \mapsto -\sin x + \frac{1}{3}\sin^3 x$ et donc $y : x \mapsto -\tan x + \frac{\sin^3 x}{3\cos x}$.

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \frac{k}{\cos x} - \tan x + \frac{\sin^3 x}{3\cos x}, k \in \mathbb{R}\right\}}$$

2 ENSAM-CCP PT : $y'' + y = \cos^3 x$

— *Résolution de l'ELHA* (E_0) : $y'' + y = 0$.

L'équation caractéristique est (E_c) : $r^2 + 1 = 0$. Ses solutions sont i et $-i$.

Les solutions réelles de (E_0) sont $x \mapsto e^{0x}(\lambda\cos x + \mu\sin x)$ *i.e.* $x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x$, avec $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

— On cherche une solution particulière de (E).

En linéarisant le second membre, $y'' + y = \cos^3 x \iff y'' + y = \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x$.

On utilise la méthode de *superposition des solutions* :

① On cherche une solution particulière de (E_1) : $y'' + y = \cos 3x$.

On peut essayer $x \mapsto \alpha\cos 3x$ qui est solution de (E_1) si, et seulement si $-9\alpha + \alpha = 1$ *i.e.* $\alpha = -\frac{1}{8}$.

D'où, $x \mapsto -\frac{1}{8}\cos 3x$ est une solution particulière de (E_1).

② On cherche une solution particulière de (E_2) : $y'' + y = \cos x$.

Là, on ne peut plus appliquer la même méthode (pourquoi ?).

On considère (E_2') : $y'' + y = e^{ix}$.

On recherche une solution de (E_2') sous la forme $\phi : x \mapsto P(x)e^{ix}$ où ϕ est un polynôme.

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) &= P(x)e^{ix} \\ \phi'(x) &= P'(x)e^{ix} + iP(x)e^{ix} \\ \phi''(x) &= P''(x)e^{ix} + 2iP'(x)e^{ix} - P(x)e^{ix} \end{aligned}$$

ϕ est solution de (E_2') si, et seulement si

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \phi''(x) + \phi(x) &= e^{ix} \\ P''(x)e^{ix} + 2iP'(x)e^{ix} &= e^{ix} \\ P''(x) + 2iP'(x) &= 1 \qquad (e^{ix} \neq 0) \end{aligned}$$

En considérant les degré, un polynôme P de degré 1 convient et on peut prendre, par exemple, $P = \frac{1}{2i}X$.

D'où, $\phi : x \mapsto \frac{1}{2i}xe^{ix}$ est solution de (E_2') : $y'' + y = e^{ix}$.

En prenant la partie réelle : $x \mapsto \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}xe^{ix}\right)$ est solution de (E_2) : $y'' + y = \cos x$.

Or, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}xe^{ix}\right) = \mathrm{Re}\left(\frac{x(\cos x + i\sin x)}{2i}\right) = \frac{1}{2}x\sin x$.

En utilisant le principe de superposition des solutions, la fonction :

$$x \mapsto \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{8}\cos 3x\right) + \frac{3}{4}\left(\frac{1}{2}x\sin x\right)$$

est solution particulière de (E).

$$\boxed{\mathcal{S} = \left\{x \mapsto \lambda\cos x + \mu\sin x - \frac{1}{32}\cos 3x + \frac{3}{8}x\sin x, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\right\}}$$

Exercice 2 :

— A est non vide. Considérons donc $a \in A$. En prenant $x = y = a$, on a donc $0 \in L$ *i.e.* L est non vide.

A étant bornée, considérons $M \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in A, |x| \leqslant M$.

On a alors $\forall (x, y) \in A^2, |y - x| \leqslant |x| + |y| \leqslant 2M$ *i.e.* L est majoré par 2M.

L admet donc une borne supérieure $\sup L$.

— Montrons que $\sup L = \sup A - \inf A$ par double inégalité :

($\leqslant$) : Soient x et y dans A. On a $x - y \leqslant \sup A - \inf A$, et de la même manière, $y - x \leqslant \sup A - \inf A$.

On en conclut que $|x - y| \leqslant \sup A - \inf A$, et donc $\sup L \leqslant \sup A - \inf A$.

($\geqslant$) : Montrons désormais que $\sup L \geqslant \sup A - \inf A$

On va chercher à prouver que $\sup A \leqslant \sup L + \inf A$

Il suffit de prouver que $\sup L + \inf A$ est un majorant de A. Soit donc $x \in A$.

Montrer que $x \leqslant \sup L + \inf A$ revient à prouver que $x - \sup L \leqslant \inf A$, i.e. $x - \sup L$ est un minorant de A.

Considérons maintenant $y \in A$, et montrons que $x - \sup L \leqslant y$, i.e. $x - y \leqslant \sup L$. Mais cette dernière inégalité est vérifiée puisque $\sup L$ est un majorant de L.

La démonstration peut se rédiger ainsi :

Soit $x \in A$.

Pour tout $y \in A$, on a $x - y \leqslant |x - y| \leqslant \sup L$. Par conséquent $-\sup L \leqslant y - x$ et encore $x - \sup L \leqslant y$.

Comme c'est valable pour tout $y \in A$, on en déduit que $x - \sup L \leqslant \inf A$, ou encore que $x \leqslant \inf A + \sup L$.

Comme c'est valable pour tout $x \in A$, $\inf A + \sup L$ est un majorant de A.

On a alors $\sup A \leqslant \sup L + \inf A$, soit $\sup L \geqslant \sup A - \inf A$.

Finalement, $\boxed{\sup L = \sup A - \inf A}$.

Exercice 3 :

1 ① Soit $x \in \mathbb{R}$. Par définition de la partie entière, $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Donc $0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1$ *i.e.* $0 \leqslant f(x) < 1$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant f(x) < 1}$$

② Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$.

— $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ donc $\lfloor x \rfloor + k \leqslant x + k$.
$\lfloor x \rfloor + k$ étant un entier inférieur à $x + k$, et $\lfloor x + k \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a

$$\lfloor x \rfloor + k \leqslant \lfloor x + k \rfloor$$

— $\lfloor x + k \rfloor \leqslant x + k$ donc $\lfloor x + k \rfloor - k \leqslant x$.
$\lfloor x + k \rfloor - k$ étant un entier inférieur à x, et $\lfloor x \rfloor$ le plus grand d'entre eux, on a $\lfloor x + k \rfloor - k \leqslant \lfloor x \rfloor$.

$$\lfloor x + k \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + k$$

On en déduit que $\lfloor x + k \rfloor = \lfloor x \rfloor + k$.
Ainsi, $f(x+k) = (x+k) - \lfloor x + k \rfloor = (x+k) - (\lfloor x \rfloor + k) = x - \lfloor x \rfloor = f(x)$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(x+k) = f(x)}$$

Remarque : En particulier que $\forall k \in \mathbb{Z}, \quad f(k) = f(0) = 0$.

③ Soient $x \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{Z}$.
On a $x = \lfloor x \rfloor + (x - \lfloor x \rfloor) = \lfloor x \rfloor + f(x)$.
D'où $px = p\lfloor x \rfloor + pf(x)$.
Or $p\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$ donc $f(px) = f(\underbrace{p\lfloor x \rfloor}_{\in \mathbb{Z}} + pf(x)) = f(pf(x))$ d'après la propriété précédente appliquée avec $k = p\lfloor x \rfloor$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \forall p \in \mathbb{Z}, \quad f(px) = f(pf(x))}$$

2 ① Montrons que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad [x \in \mathbb{Q} \iff (\exists q \in \mathbb{Z}^\star, f(qx) = 0)]$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$\Longrightarrow$ **:** Supposons que $x \in \mathbb{Q}$. On peut alors écrire $x = \dfrac{p}{q}$ avec $q \in \mathbb{Z}^\star$.
On a alors $qx \in \mathbb{Z}$ et donc $f(qx) = 0$.

$\Leftarrow$ **:** Supposons qu'il existe un entier $q \in \mathbb{Z}^\star$ tel que $f(qx) = 0$.
On en déduit que $qx - \lfloor qx \rfloor = 0$, ou encore $qx = \lfloor qx \rfloor$.
Posons $p = \lfloor qx \rfloor \in \mathbb{Z}$.
On a alors $qx = p$ d'où $x = \dfrac{p}{q}$ (car $q \neq 0$).
Les nombres p et q étant des entiers, on a bien $x \in \mathbb{Q}$.

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad [x \in \mathbb{Q} \iff (\exists q \in \mathbb{Z}^\star, f(qx) = 0)]}$$

② Soit x un rationnel. Il existe des entiers p et q, avec $q > 0$ tels que $x = \dfrac{p}{q}$.
Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ et r le reste dans le division euclidienne de n par q.
On a donc $n = qa + r$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}$.
Alors $f(nx) = f((qa + r)x) = f(qax + rx) = f\left(qa\dfrac{p}{q} + rx\right) = f(ap + rx) = f(rx)$ car $ap \in \mathbb{Z}$.

L'ensemble F_x est l'ensemble des $f(nx)$ pour n décrivant $\mathbb{N}^\star$. Mais on vient de démontrer que les $f(nx)$ sont dans l'ensemble $\left\{f(rx), r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}\right\}$ d'où

$$\boxed{\mathrm{F}_x \subset \left\{f(rx), r \in \{0, 1, 2, \ldots, q-1\}\right\}}$$

L'ensemble F_x est donc fini. Il compte au maximum q valeurs.

3 Dans la suite du problème, on considère x un réel qui n'est pas rationnel.

① F_x est **non vide**. Il contient par exemple $f(1x) = x - \lfloor x \rfloor$.
Par ailleurs, F_x est **minoré** (par 0). En effet, on a vu que $\forall \mathrm{X} \in \mathbb{R}, \quad f(\mathrm{X}) \geqslant 0$.
On en déduit que $\boxed{\mathrm{F}_x \text{ admet une borne inférieure.}}$

② On pose $\alpha = \inf(\mathrm{F}_x)$.
On suppose que $\alpha > 0$.
$\forall k \in \mathbb{N}, \quad k\alpha \geqslant 1 \iff k \geqslant \dfrac{1}{\alpha}$.
Par exemple, l'entier $\left\lfloor \dfrac{1}{\alpha} \right\rfloor + 1$ est dans $\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\}$. On en déduit que cet ensemble est **non vide**.
Toute partie de $\mathbb{N}$ non vide admet un plus petit élément donc $\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\}$ admet un plus petit élément.
Posons $p = \min(\{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\})$. On peut vérifier que $p \neq 0$ puisque $0\alpha < 1$.
On a donc $\begin{cases} p \in \{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\} \\ p - 1 \notin \{k \in \mathbb{N}, k\alpha \geqslant 1\} \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} p\alpha \geqslant 1 \\ (p-1)\alpha < 1 \end{cases}$.
La deuxième inégalité donne $p\alpha < 1 + \alpha$ et comme $p > 0$, on en déduit $\boxed{\alpha < \dfrac{\alpha + 1}{p}}$.

③ Comme $\alpha = \inf(\mathrm{F}_x)$, α est le plus grand des minorants de F_x.
On vient de voir que $\dfrac{\alpha+1}{p} > \alpha$, donc $\dfrac{\alpha+1}{p}$ n'est plus un minorant de F_x. Par conséquent, il existe un élément de F_x (disons $f(nx)$ avec $n \in \mathbb{N}^\star$) tel que $f(nx) < \dfrac{\alpha+1}{p}$.
Par ailleurs, α est un minorant de F_x, donc on a $\alpha \leqslant f(nx)$.

$$\boxed{\text{Il existe bien un entier } n \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } \alpha \leqslant f(nx) < \dfrac{\alpha+1}{p}.}$$

④ En multipliant par $p > 0$, on a $p\alpha \leqslant pf(nx) < \alpha + 1 \quad (1)$.
Or, on a vu à la question **3**.② que $p\alpha \geqslant 1$.
D'où, $1 \leqslant p\alpha \leqslant pf(nx)$.
1 est un entier inférieur à $pf(nx)$ et $\lfloor pf(nx) \rfloor$ est le plus grand d'entre eux. D'où

$$\boxed{1 \leqslant \lfloor pf(nx) \rfloor}$$

Donc

$$\begin{aligned} f(pf(nx)) &= pf(nx) - \lfloor pf(nx) \rfloor \text{ par définition de } f \\ &\leqslant pf(nx) - 1 \text{ puisque } 1 \leqslant \lfloor pf(nx) \rfloor \\ &< (\alpha + 1) - 1 \text{ d'après (1)} \end{aligned}$$

On conclut que

$$\boxed{f(pf(nx)) < \alpha}$$

Or, d'après la question **1**.③ on a $f(pf(nx)) = f(pnx)$, d'où $f(pnx) < \alpha$.
C'est absurde, puisque α est un minorant de F_x et que $f(pnx) \in \mathrm{F}_x$.

On en déduit que l'hypothèse faite au 3.2 (à savoir $\alpha > 0$) est fausse.
On a donc $\alpha \leqslant 0$.
Par ailleurs, on a déjà dit que F_x était minoré par 0. Donc $0 \leqslant \alpha$.
On peut donc conclure que $\alpha = 0$.

$$\boxed{\inf(\mathrm{F}_x) = 0}$$

4 1 Soit $\lambda > 0$. Comme λ est strictement supérieur à $\inf(\mathrm{F}_x)$, λ n'est pas un minorant de F_x.
Par conséquent, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $f(nx) < \lambda$.
On a aussi $\inf(\mathrm{F}_x) = 0 \leqslant f(nx)$. Et si on avait $0 = f(nx)$, on aurait x rationnel : c'est absurde.
D'où, $0 < f(nx)$.

$$\boxed{\text{Pour tout réel } \lambda > 0, \text{ il existe } n \in \mathbb{N}^\star \text{ tel que } 0 < f(nx) < \lambda.}$$

2 On considère un intervalle $]a, b[$, avec $0 < a < b < 1$. Posons $\lambda = b - a > 0$.
D'après la question précédente, il existe $n \in \mathbb{N}^\star$ tel que $0 < f(nx) < \lambda$.
On note $p = \left\lfloor \dfrac{b}{f(nx)} \right\rfloor$.
On a $\dfrac{b}{f(nx)} - 1 < p \leqslant \dfrac{b}{f(nx)}$.
En multipliant par $f(nx) > 0$, on obtient : $b - f(nx) < pf(nx) \leqslant b$.
Or $f(nx) < b - a$ donc $a < b - f(nx)$.
On en déduit finalement,

$$a < pf(nx) \leqslant b. \tag{VIII.1}$$

Comme $0 < a < b < 1$, on a $0 < pf(nx) < 1$.
Par conséquent, $\lfloor pf(nx) \rfloor = 0$ et donc $f(pf(nx)) = pf(nx) - \lfloor pf(nx) \rfloor = pf(nx)$.
Et d'après la question 1.c., on a $f(pf(nx)) = f(pnx)$, donc

$$f(pnx) = pf(nx). \tag{VIII.2}$$

D'après (VIII.1) et (VIII.1), on conclut que $a < f(pnx) \leqslant b$.
Comme $f(pnx) \in \mathrm{F}_x$, on peut conclure :

$$\boxed{]a, b[\text{ contient un élément de } \mathrm{F}_x.}$$

Autrement dit, F_x **est dense dans** $[0, 1]$.