Limites

Exercice 1 (Densité) : On s'intéresse ici à une propriété très importante de l'analyse : la densité d'un ensemble dans un autre.

Soit D une partie de $\mathbb{R}$. On dit que **D est dense dans** $\mathbb{R}$ lorsque :

$$\forall (a;\, b) \in \mathbb{R}^2, \quad (a < b \implies \exists\, x \in \mathrm{D},\, a \leqslant x \leqslant b)$$

1 Les parties $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont-elles denses dans $\mathbb{R}$?

2 **Densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:**

① Montrer qu'entre deux réels distants d'au moins une unité, on peut toujours intercaler un entier relatif, i.e.

$$\forall u, v \in \mathbb{R}, \quad (v - u > 1 \implies \exists\, p \in \mathbb{Z}, u \leqslant p \leqslant v)$$

② Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.
Montrer qu'il existe un entier naturel q non nul tel que $q(b - a) > 1$.

③ Conclure.

3 **Densité de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$:**

① Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$.

Montrer qu'il existe un rationnel r dans l'intervalle $\left[\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,;\,\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right]$.

② Conclure.

Exercice 2 : En justifiant convenablement, calculer :

1 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3}\right)$

2 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x^3(\ln x)^2 e^{-x}$

3 $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x - \lfloor x \rfloor}{x + \lfloor x \rfloor}$

Exercice 3 : Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.