Limites

Exercice 1 :

1 Si on prend $a = 0,1$ et $b = 0,2$, on a bien $a < b$.
Or, il n'existe aucun entier (ni naturel, ni relatif) dans l'intervalle $[0,1\,;0,2]$.
Donc $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ ne sont pas denses dans $\mathbb{R}$.

2 (1) Montrons qu'entre deux réels distants d'au moins une unité, on peut toujours intercaler un entier relatif.
Considérons deux réels u et v vérifiant $v - u > 1$.
Notons $p = \lfloor u \rfloor$.
Par définition de la partie entière, on a $v - 1 < p \leqslant v$.
Or, $v - u > 1 \implies u < v - 1$.
Finalement, on a bien $u < p \leqslant v$.
On a donc bien trouvé un entier p dans l'intervalle $[u\,;v]$.

(2) Soient a et b deux réels tels que $a < b$.
Montrons qu'il existe un entier naturel q non nul tel que $q(b-a) > 1$.
Par l'absurde, supposons que pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on ait $q(b-a) \leqslant 1$.
Alors, on aurait $q \leqslant \dfrac{1}{b-a}$ et l'ensemble des entiers naturels serait majoré : c'est absurde !
D'où, $\exists\, q \in \mathbb{N}^*,\ q(b-a) > 1$.

(3) D'après la question précédente, on a donc $qb - qa > 1$.
Appliquons le résultat de la question (1) : il existe un entier $p \in \mathbb{Z}$ tel que $qa \leqslant p \leqslant qb$.
En divisant par $p > 0$, on obtient $a \leqslant \dfrac{p}{q} \leqslant b$: il existe un rationnel dans l'intervalle $[a\,;b]$.
Par conséquent, $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

3 (1) D'après la question précédente, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$, il existe un rationnel $r \in \left[\dfrac{a}{\sqrt{2}}\,;\dfrac{b}{\sqrt{2}}\right]$ *i.e.*

$$\frac{a}{\sqrt{2}} \leqslant r \leqslant \frac{b}{\sqrt{2}} \iff a \leqslant r\sqrt{2} \leqslant b. \qquad (X.1)$$

(2) Comme $r\sqrt{2} \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, l'encadrement (X.1) montre que $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 2 :

1 $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,$

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3} &= \frac{x-1}{\sqrt{x^2+2x+2}+\sqrt{x^2+x+3}} \\ &= \frac{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x}\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\cancel{x}\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}} \\ &= \frac{1-\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2}}}.\end{aligned}$$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+2x+2} - \sqrt{x^2+x+3}\right) = \frac{1}{2}}$

2 $\forall x > 0,\ x^3(\ln x)^2 e^{-x} = \left(\dfrac{\ln x}{x}\right)^2 \dfrac{1}{\frac{e^x}{x^5}}$.

Or,

— $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\ln x}{x}\right)^2 = 0,$

— et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^5} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^x}{x^5}} = 0.$

D'après les théorèmes sur les limites d'un produit, on a donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}\frac{1}{\frac{e^x}{x^5}} = 0.$

Donc, $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x^3(\ln x)^2 e^{-x} = 0}$

3 On sait que :

(1) $\forall x \in \mathbb{R},\quad 0 \leqslant x - \lfloor x \rfloor < 1.$

(2) $\forall x > 1,\quad x + \lfloor x \rfloor > 2x - 1$ donc $\forall x > 0,\quad 0 < \dfrac{1}{x+\lfloor x \rfloor} < \dfrac{1}{2x-1}.$

Par produit de ces nombres positifs, $\forall x > 0,\quad 0 \leqslant \dfrac{x - \lfloor x \rfloor}{x+\lfloor x \rfloor} < \dfrac{1}{2x-1}.$

Or, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2x-1} = 0$, donc, d'après le théorème d'encadrement :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{x - \lfloor x \rfloor}{x+\lfloor x \rfloor} = 0}$$

Exercice 3 : Soient $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

Procédons par double inégalités :

« $\leqslant$ » : $\lfloor nx \rfloor \leqslant nx$ donc $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \leqslant x$ puis $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor$ par croissance de la fonction $x \longmapsto \lfloor x \rfloor$.

« $\geqslant$ » : $\lfloor x \rfloor \leqslant x$ et donc $n\lfloor x \rfloor \leqslant nx$.

Comme $n\lfloor x \rfloor \in \mathbb{Z}$, on a donc $n\lfloor x \rfloor \leqslant \lfloor nx \rfloor \implies \lfloor x \rfloor \leqslant \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$.

$\lfloor x \rfloor$ est ainsi un entier inférieur à $\dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n}$. Il est donc inférieur au plus grand d'entre eux $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$

i.e. $\lfloor x \rfloor \leqslant \left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor$.

On en déduit $\boxed{\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor}$.