Primitives et continuité

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b$.

On considère dans ce problème une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur l'intervalle $[a\,;b]$ et telle que $\forall x \in [a\,;b]$, $f'(x) > 0$.

L'objectif du problème est de démontrer, puis utiliser la formule suivante :

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = bf(b) - af(a). \qquad \text{(E)}$$

Partie I

Dans cette partie, on vérifie la formule (E) sur un cas particulier.

Soit p un réel strictement positif. On définit, dans cette partie seulement, la fonction f par :

$$f:\ x \longmapsto x^p.$$

1. Justifier que f est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ avec $\forall x \in [a\,;b]$, $f'(x) > 0$.

   Aide: C'est quoi une fonction de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Vérifier que f induit une bijection de l'intervalle $[a\,;b]$ sur un intervalle I à préciser, et expliciter l'expression sur I de sa fonction réciproque f^{-1}.

   Aide: Il me semble qu'un théorème du même nom existe avec deux conditions vérifier.
   Quant à connaître la réciproque d'une fonction puissance...
   Attention aux intervalles toutefois.
3. Calculer les intégrales $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t$.

   Aide: L'intégrale de deux fonctions puissances ? What's the joke ?
4. En déduire que la formule (E) est vraie sur cet exemple.

   Aide: Question (4), (E), remplacer et observer non ?

Partie II

Dans cette partie, on prouve par deux méthodes la formule (E).

On considère donc ici une fonction f de $\mathcal{C}^1$ sur $[a\,;b]$ telle que $\forall x \in [a\,;b]$, $f'(x) > 0$.

5. Justifier que f induit une bijection de l'intervalle $[a\,;b]$ sur un intervalle I à préciser, et que sa réciproque f^{-1} est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

   Aide: À quelles conditions une fonction est-elle bijective ?
   À quelle condition une réciproque est-elle dérivable ?
6. **Première méthode :**

   On pose : $\quad \mathrm{F}:\ x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \quad$ et $\quad \mathrm{G}:\ x \longmapsto \displaystyle\int_{f(a)}^x f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t.$

   (a) Montrer que les fonctions F et G sont dérivables, respectivement sur les intervalles $[a\,;b]$ et I, et préciser leurs dérivées.

   Aide: F et G sont des quoi déjà ? ? ?

   (b) Pour tout $x \in \mathrm{I}$, on pose :

   $$\varphi:\ x \longmapsto \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{f(a)}^{f(x)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t - xf(x).$$

   Vérifier que la fonction φ est dérivable sur l'intervalle $[a\,;b]$, et que :

   $$\forall x \in [a\,;b],\ \varphi'(x) = 0.$$

   Aide: Question (6b) et les yeux fermés non ?

   (c) En déduire la formule (E).

   Aide: Si je me rappelle bien on a déjà dû faire ça pour une certaine fonction et une relation sympa.
7. **Deuxième méthode :**

   (a) En utilisant un changement de variable, montrer que :

   $$\int_{f(a)}^{f(b)} f^{-1}(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b uf'(u)\mathrm{d}u.$$

   Aide: C'est qui qui transforme $f(a)$ en a ?

   (b) En déduire la formule (E).

   Aide: Quand on voit l'intégrale d'un produit, et $x \times f'(x)$ sous l'intégrale, on pense à faire quoi ?

Partie III

Le but de cette partie est de calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$.

8. Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < \dfrac{\pi}{2}$.

   Après avoir justifié son utilisation, écrire la formule (E) obtenue pour la fonction $f:\ x \longmapsto \sqrt{\tan(t)}$.

   Aide: C'est quoi les conditions pour (E) ? Le domaine de définition de tan ? de $\sqrt{\ }$? Sur quel intervalle est-on ?

   (On précisera ici, en la justifiant, l'expression de f^{-1}.)

   Aide: Un élève malin trouvera la réponse à sa question dans le sujet comme dans les sujets de bac.
9. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \frac{\pi}{4} - \int_0^1 \arctan(t^2)\,\mathrm{d}t.$

   Aide: Une question donnée. Quel peut bien être le rapport avec la question précédente ?
10. Conclure que $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^4}\,\mathrm{d}t.$
11. (a) Déterminer quatre réels u_1, u_2, u_3, u_4 tels que :

   $$\frac{t^2}{t^4+1} = \frac{u_1t+u_2}{t^2+\sqrt{2}t+1} + \frac{u_3t+u_4}{t^2-\sqrt{2}t+1}.$$

   Aide: Ne serait-ce pas une décomposition connue ?
   Remarquez quand même que le premier membre est pair donc le deuxième doit l'être aussi.
   Enfin un élève avisé lira avantageusement la suite du sujet.

   (b) Prouver, sans calculer ces intégrales, que :

   $$\int_0^1 \frac{t}{t^2+\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{-1} \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t.$$

   Aide: Qu'est-ce qui pourrait bien changer + en − ?

   (c) Exprimer alors l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t$ en fonction de l'intégrale :

   $$\int_{-1}^1 \frac{t}{t^2-\sqrt{2}t+1}\,\mathrm{d}t.$$

   Aide: Il serait malvenu qu'une question (c) se résolve sans utiliser les question précédentes voir la question (10) pour faire bonne mesure.

12. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t}{t^2 - \sqrt{2}t + 1}\,\mathrm{d}t$.

    Aide: Easy

13. (a) Établir que $\forall\, x \in \mathbb{R}_+^*$, $\arctan(x) + \arctan\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

    Aide: Un élève assidu saura retrouver la méthode du cours.

    (b) En déduire la valeur de $\arctan\left(\sqrt{2}+1\right) + \arctan\left(\sqrt{2}-1\right)$.

    Aide: C'est quoi l'inverse de $\sqrt{2}+1$?

14. Déduire des questions précédentes une formule de la forme :

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{\tan(t)}\,\mathrm{d}t = \alpha\big(\ln(\beta) + \pi\big),$$

où α et β sont deux réels à préciser.

Aide: Une dernière question qui ne ferait pas la synthèse des précédentes se serait appelée question 1.

Conclure.