Continuité

Exercice 1 (Intégration) :

1 Calculer $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x$.

2 En déduire $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{e^{\pi}} \sin\left(\ln t\right)\mathrm{d}t$. (On admettra que L est correctement définie).

Exercice 2 (EDL) : Soit (E) : $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos(2x)$.

1 Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle linéaire homogène associée (E_0) : $y'' - 2y' + 5y = 0$.

2 On pose $(\tilde{\mathrm{E}})$: $y'' - 2y' + 5y = e^{x(1+2\mathrm{i})}$. Déterminer une solution particulière de $(\tilde{\mathrm{E}})$.

3 En déduire une solution particulière de (E) puis déterminer l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3 (Continuité) :

1 Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \sqrt{x}(1-\sin x). \end{array}$
Montrer que f n'a pas de limite en $+\infty$.

2 Soit $f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & \left(x - \lfloor x \rfloor\right)^2 + \left(\lfloor x \rfloor + 1 - x\right)^2. \end{array}$
Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3 Soient $f, g : [0\,;1] \longmapsto \mathbb{R}$ deux fonctions continues sur $[0\,;1]$.
On suppose que $f(0) = g(1) = 0$ et que $f(1) = g(0) = 1$.
Montrer que :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}_+,\ \exists\, a \in [0\,;1] \ /\ f(a) = \lambda\, g(a).$$

Problème 4 (Étude d'une fonction réciproque) : Soit $k \in \mathbb{R}$, l'objet de ce problème est d'exprimer certaines solutions de l'équation :

$$\frac{x}{\ln x} = k, \text{ d'inconnue } x, \qquad (\mathrm{E}_k)$$

à l'aide d'une fonction appelée *fonction de Lambert*.

Dans la suite, on désigne par f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$ et par g la fonction définie par $g(x) = xe^x$.

Partie I : Étude de f

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_f$ de f.
2. Justifier que f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ puis calculer f'.
3. Déterminer les limites aux bornes de $\mathcal{D}_f$.
4. Dresser le tableau de variations de f.
5. Justifier que f réalise une bijection de $]1\,;e]$ vers $[e\,;+\infty[$.

Dans la suite, on note $f^{-1} : [e\,;+\infty[\longmapsto]1\,;e]$ la réciproque de f.

6. Discuter en fonction de k du nombre de solutions de l'équation (E_k).

Partie II : Fonction W de Lambert

On a réalisé l'étude de la fonction g. C'est une fonction définie et dérivable sur $\mathcal{D}_g = \mathbb{R}$ dont le tableau de variations est le suivant :

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
g	0 ↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗ $+\infty$

7. Montrer l'existence d'une fonction $\mathrm{W} : \left[-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[\longmapsto [-1\,;+\infty[$ telle que pour tout $y \geqslant -\dfrac{1}{e}$:
$$\mathrm{W}(y)e^{\mathrm{W}(y)} = y.$$
8. Justifier que W est continue sur $\left[-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$ puis étudier les variations de W. [1]
9. Déterminer $\mathrm{W}\left(-\dfrac{1}{e}\right)$, $\mathrm{W}(0)$, $\mathrm{W}(e)$ et $\displaystyle\lim_{y\to+\infty}\mathrm{W}(y)$.
10. Montrer que W est dérivable sur $\left]-\dfrac{1}{e}\,;+\infty\right[$ puis que pour tout $y > -\dfrac{1}{e}$, et $y \neq 0$:
$$\mathrm{W}'(y) = \frac{\mathrm{W}(y)}{y(1+\mathrm{W}(y))}.$$

Partie III : Expression des solutions de (E_k) à l'aide de W

Soit $k \geqslant e$. L'objectif de cette dernière partie est d'exprimer une solution de (E_k) à l'aide de la fonction W.

11. Soit $x > 0$ un réel. Justifier l'existence d'un unique réel $z \in \mathbb{R}$ tel que $x = e^{-z}$.
Établir que $\dfrac{x}{\ln x} = k$ équivaut à $ze^z = -\dfrac{1}{k}$.
12. En déduire une expression de $f^{-1}(k)$ à l'aide de W pour tout $k \geqslant e$.

[1]. La fonction W étudiée ici est appelée la fonction W de Lambert (il s'agit plus précisément d'une de ses déterminations). La fonction de Lambert est une fonction usuelle qui apparaît dans des contextes variés, notamment en mécanique quantique.