Continuité

Exercice 1 (Intégration) :

1. $\mathrm{K} = \displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} e^x \mathrm{Im}\left(e^{\mathrm{i}x}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\int_0^{\pi} e^{(1+\mathrm{i})x}\right)\,\mathrm{d}x = \mathrm{Im}\left(\left[\frac{1}{1+\mathrm{i}}e^{(1+\mathrm{i})x}\right]_0^{\pi}\right)$

$$= \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\left(e^{(1+\mathrm{i})\pi}-1\right)\right) = \mathrm{Im}\left(\frac{1-\mathrm{i}}{2}\left(-e^{\pi}-1\right)\right) = \frac{e^{\pi}+1}{2}.$$

2. Soit $t \in [1\,;e^{\pi}]$. On pose $x = \ln t \in [0\,;\pi]$.
La fonction $\varphi : t \longmapsto \ln t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1\,;e^{\pi}]$. Par changement de variable, on a alors :

$$x = \ln t \iff t = e^x \qquad \mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \varphi(1) = 0 \text{ et } \varphi(e^{\pi}) = \pi$$

$$\text{D'où } \mathrm{L} = \int_0^{e^{\pi}} \sin\left(\ln t\right)\mathrm{d}t = \int_0^{e^{\pi}} t\sin\left(\ln t\right)\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi} e^x\sin(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{K}.$$

Donc, $\mathrm{L} = \displaystyle\int_0^{e^{\pi}} \sin\left(\ln t\right)\mathrm{d}t = \frac{e^{\pi}+1}{2}$.

Exercice 2 (EDL) : Soit (E) : $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos(2x)$.

1. L'équation caractéristique (E_c) : $r^2 - 2r + 5 = 0$ admet deux solutions complexes conjuguées $r_1 = 1-2\mathrm{i}$ et $r_2 = 1+2\mathrm{i}$.
Les solutions sur $\mathbb{R}$ de (E_0) sont les fonctions de la forme :

$$y_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^x\left(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\right), \ (\lambda;\, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

2. Le complexe $1+2\mathrm{i}$ est solution de l'équation caractéristique.
On peut chercher une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $(\tilde{\mathrm{E}})$ sous la forme $\tilde{y}_p : x \longmapsto (ax+b)e^{x(1+2\mathrm{i})}$ où $(a;\, b) \in \mathbb{C}^2$.
Or, $x \longmapsto e^{x(1+2\mathrm{i})}$ est solution de $(\tilde{\mathrm{E}})$ donc, afin de simplifier les calculs, on peut d'ors et déjà choisir $b = 0$.
La fonction y_p est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$. On a alors

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ y_p(x) &= axe^{x(1+2\mathrm{i})} \\ \tilde{y}_p'(x) &= \left(x(1+2\mathrm{i}) + 1\right)ae^{x(1+2\mathrm{i})} \\ \tilde{y}_p''(x) &= \left(x(1+2\mathrm{i})^2 + 2(1+2\mathrm{i})\right)ae^{x(1+2\mathrm{i})} \end{aligned}$$

Ainsi, $\tilde{y}_p$ est solution de $(\tilde{\mathrm{E}})$ sur $\mathbb{R}$ si, et seulement si

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R},\ e^{x(1+2\mathrm{i})} &= \tilde{y}_p''(x) - 2\tilde{y}_p'(x) + 5\tilde{y}_p(x) \\ e^{x(1+2\mathrm{i})} &= \left(x(1+2\mathrm{i})^2 + 2(1+2\mathrm{i}) - 2x(1+2\mathrm{i}) - 2 + 5x\right)ae^{x(1+2\mathrm{i})} \\ 1 &= 4a\mathrm{i}, \qquad \text{car } e^{x(1+2\mathrm{i})} \neq 0 \\ a &= -\frac{1}{4}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Une solution particulière sur $\mathbb{R}$ de $(\tilde{\mathrm{E}})$ est $y_p : x \longmapsto -\dfrac{1}{4}\mathrm{i}xe^{x(1+2\mathrm{i})}$.

3. Comme (E) : $y'' - 2y' + 5y = e^x\cos(2x) = \mathrm{Re}\left(e^{(1+2\mathrm{i})x}\right)$ alors la fonction

$$\mathrm{Re}\left(\tilde{y}_p\right) : x \longmapsto \mathrm{Re}\left(-\frac{1}{4}\mathrm{i}xe^{x(1+2\mathrm{i})}\right) = \frac{1}{4}xe^x\sin(2x),$$

est une solution particulière de (E).
Les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont donc les fonctions de la forme :

$$y : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^x\left(\lambda\cos(2x) + \mu\sin(2x)\right) + \frac{1}{4}xe^x\sin(2x), \ (\lambda;\, \mu) \in \mathbb{R}^2. \end{array}$$

Exercice 3 (Continuité) :

1. Supposons que f a une limite en $+\infty$ et nions l'unicité de cette dernière.
Soit $n \in \mathbb{N}$.
— Si $u_n = 2n\pi$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ et $f(u_n) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
Nécessairement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
— Si $v_n = 2n\pi + \dfrac{\pi}{2} \geqslant 0$ alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = +\infty$ et $f(v_n) = \sqrt{2n\pi + \dfrac{\pi}{2}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$.
Nécessairement, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Si elle existait, la limite serait unique d'où la contradiction : f ne peut avoir de limites en $+\infty$.

2. La fonction f est une somme de produit de fonction continues sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$.
De plus, soit $a \in \mathbb{Z}$. On a $\lfloor a \rfloor = a$ puis $f(a) = \left(a - \lfloor a \rfloor\right)^2 + \left(\lfloor a \rfloor + 1 - a\right)^2 = (a-a)^2 + (a+1-a)^2 = 1$.
— Si $x \in]a-1\,;a[$, alors $\lfloor x \rfloor = a-1$ et $f(x) = \left(x-a+1\right)^2 + \left(a-x\right)^2 \xrightarrow[\substack{x\to a\\x<a}]{} 1 = f(a)$.
— Si $x \in]a\,;a+1[$, alors $\lfloor x \rfloor = a$ et $f(x) = \left(x-a\right)^2 + \left(a+1-x\right)^2 \xrightarrow[\substack{x\to a\\x>a}]{} 1 = f(a)$.

En conclusion, $\displaystyle\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = 1 = f(a)$. La fonction f est continue en $a \in \mathbb{Z}$ quelconque donc en tout point de $\mathbb{Z}$. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+$.
On pose $\varphi : \begin{array}{ccc} [0\,;1] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & f(x) - \lambda\,g(x). \end{array}$
— φ est clairement continue sur $[0\,;1]$.
— $\varphi(0) = f(0) - \lambda\,g(0) = -\lambda \leqslant 0$ et $\varphi(1) = f(1) - \lambda\,g(1) = 1 \geqslant 0$ *i.e.* $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$ sont de signe contraire.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe donc $a \in [0\,;1]$ tel que $\varphi(a) = 0$

$$\iff f(a) = \lambda\,g(a).$$

Problème 4 (Étude d'une fonction réciproque) :

On considère l'équation :

$$\frac{x}{\ln x} = k, \text{ d'inconnue } x. \tag{E_k}$$

Partie I : Étude de f

1. f est définie si, et seulement si $x > 0$ et $\ln x \neq 0$ d'où $\mathcal{D}_f =]0\,;1[\cup]1\,;+\infty[$.
2. Comme quotient de dénominateur non nul de fonctions dérivables sur $\mathcal{D}_f$, f est dérivable sur $\mathcal{D}_f$ et on a, $\forall x \in \mathcal{D}_f$:
$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}.$$
3.
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0. \qquad \lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty.$$
$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty. \qquad \lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty.$$

   Remarque : Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, on peut prolonger par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.
4. Pour $x \in \mathcal{D}_f$, le signe de $f'(x)$ est donné par celui de $\ln x - 1$.

x	0		1		e		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	0	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	e	↗	$+\infty$

5. La fonction f est continue (car dérivable) et strictement décroissante sur $]1\,;e]$.
D'après le théorème de la bijection continue, elle réalise donc une bijection de $]1\,;e]$ vers $f(]1\,;e]) = [e\,;+\infty[$.

   Remarque : Par le même raisonnement, on prouve aussi que f réalise une bijection de $[0\,;1[$ vers $f([0\,;1[) =]-\infty\,;0]$ ainsi que de $[e\,;+\infty[$ vers $f([e\,;+\infty[) = [e\,;+\infty[$.
6. D'après le tableau de variations de f et la question précédente, on a :
   - si $k < 0$, l'équation (E_k) admet une unique solution dans $]0\,;1[$.
   - si $0 \leqslant k < e$, l'équation (E_k) n'admet aucune solution.
   - si $k = e$, l'équation (E_k) admet une unique solution e.
   - si $k > e$, l'équation (E_k) admet deux solutions distinctes.

Partie II : Fonction W de Lambert

7. Pour montrer l'existence de W, il suffit simplement d'utiliser (encore) le théorème de la bijection sur l'**intervalle** $[-1\,;+\infty[$ où g y est **continue** et **strictement monotone**.
Par définition de la réciproque d'une fonction bijective, on a alors :
$$\forall y \in \mathcal{D}_W = \left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[,\ g(W(y)) = y \iff W(y)e^{W(y)} = y. \tag{XI.1}$$

8. Le même théorème que précédemment nous assure que W est continue sur $\left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$ de même sens de variations que g sur $[-1\,;+\infty[$.
9. D'après le tableau de variation de g on a :
$$W\left(-\frac{1}{e}\right) = -1 \quad \text{et} \quad \lim_{y\to+\infty} W(y) = +\infty.$$
De plus comme $g(0) = 0$, on a $W(0) = 0$. De même, $g(1) = e$ donne $W(e) = 1$.
10. La fonction W est la réciproque d'une fonction bijective dérivable dont la dérivée ne s'annule pas sur $]-1\,;+\infty[$.
D'après le théorème sur la dérivabilité de la fonction réciproque d'une fonction bijective, W est dérivable sur $\left]-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[$ et on a :
$$\forall y > -\frac{1}{e},\ W'(y) = \frac{1}{g'(W(y))}$$
or, $g'(x) = e^x + g(x)$,
$$= \frac{1}{e^{W(y)} + g(W(y))} = \frac{1}{e^{W(y)} + y}$$
D'après (XI.1), on a :
$$= \frac{1}{e^{W(y)} + W(y)e^{W(y)}} = \frac{1}{e^{W(y)}} \times \frac{1}{1+W(y)}$$
D'après (XI.1) encore, si $y \neq 0$, $\dfrac{1}{e^{W(y)}} = e^{-W(y)} = \dfrac{W(y)}{y}$:
$$= \frac{W(y)}{y(1+W(y))}.$$

Partie III : Expression des solutions de (E_k) à l'aide de W

11. La fonction $z \longmapsto e^{-z}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ vers $]0\,;+\infty[$ donc tout $x > 0$ réel peut se mettre de manière unique sous la forme $x = e^{-z}$ avec $z \in \mathbb{R}$.
On a alors :
$$x \text{ est solution de } (E_k) \iff \frac{e^{-z}}{-z} = k \text{ où } z \text{ est défini par } x = e^{-z}$$
$$\iff \frac{z}{e^{-z}} = -\frac{1}{k}$$
$$\iff ze^z = -\frac{1}{k}.$$
12. Si $k \geqslant e$, alors $-\frac{1}{e} \leqslant -\frac{1}{k}$ *i.e.* $-\frac{1}{k} \in \left[-\frac{1}{e}\,;+\infty\right[= \mathcal{D}_W$ et on peut alors composer les deux derniers membres de l'équation précédente par W. On obtient :
$$z = W\left(-\frac{1}{k}\right) \iff x = e^{-W\left(-\frac{1}{k}\right)}.$$
Donc $x = f^{-1}(k) = e^{-W\left(-\frac{1}{k}\right)} = -k \times W\left(-\frac{1}{k}\right)$.