

## Analyse Asymptotique

**Exercice 1 :** Donner les développements limités suivants :

1 DL<sub>2</sub>(0) de  $\sqrt{1 + \sqrt{1+x}}$

3 DL<sub>2</sub>(-1) de  $\arctan\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)$

2 DL<sub>5</sub>(0) de  $(1 + \sin x)^{\cos(2x)-1}$

4 DL<sub>5</sub>(0) de  $\frac{1 - \cos(x)}{\cosh(x) - 1}$

**Exercice 2 :** Les questions sont indépendantes.

1 Déterminer  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^7}$ .

2 Déterminer le DL<sub>10</sub>(0) de  $x \mapsto \int_x^{x^2} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$ .

3 Soient  $I = \left] -\frac{3\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[$  et  $f : I \rightarrow I$  définie par  $f(x) = x + \cos x$ .

① Montrer que  $f$  est bijective sur  $I$ .

② Déterminer le développement limité d'ordre 3 de  $f^{-1}$  au voisinage de 1.

**Exercice 3 :** On définit  $g : x \mapsto (x^2 + 1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + \frac{x^2 + x + 1}{x+1}$ .

1 Quel est l'ensemble de définition de  $g$  ?

2 Chercher un équivalent simple de  $g(x)$  en  $x = 0$ , puis calculer la limite de  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ .

3 Même question en  $-1$ .

4 Montrer qu'il existe des constantes  $a, b$  et  $c$  telles qu'au voisinage de  $\pm\infty$  on ait

$$g(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} ax + b + \frac{c}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

Conséquence graphique pour  $\mathcal{C}_g$ .