Suites

Exercice 1 (Suite homographique) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n - 1}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que l'équation $\ell = \dfrac{2\ell - 1}{\ell + 4}$ admet une unique solution γ.
2. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie, et qu'elle converge vers une valeur à préciser.
3. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n - \gamma}$ est bien définie et est arithmétique.
4. En déduire l'expression explicite de u_n, et retrouver sa limite.

Exercice 2 (Sous-suite) : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1. Prouver que les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent vers une même limite ℓ.
2. Que peut-on dire de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$?
3. Donner une valeur approchée de ℓ à la précision 10^{-3}.

Exercice 3 (Suite implicite) : Soit n, un entier naturel ($n \geqslant 2$). On considère l'équation

$$(\mathrm{E}_n) : x^n - nx + 1 = 0.$$

1. Montrer que (E_n) admet sur $[0\,;1]$ une unique solution notée α_n.
2. Montrer que la suite (α_n) converge vers 0.