D'après CAPES de Mathématiques 2011

0. <u>Question de cours :</u> X est une partie non vide de $\mathbb{R}$ et soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de X qui converge vers un réel ℓ. Soit f une application, définie sur X, à valeurs dans $\mathbb{R}$, définie et continue en ℓ.

   Montrer que la suite $(f(u_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $f(\ell)$.

Soit f une fonction à valeurs dans $\mathbb{R}$ définie sur un intervalle I d'intérieur non vide.
On dit que f possède la propriété des valeurs intermédiaires si pour tout $(a,b)\in \mathrm{I}^2$ tel que $a<b$ et pour tout réel λ compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=\lambda$.
Cette propriété sera notée $\mathcal{P}$ dans la suite.

1. **Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires :**

   On se propose dans ce qui suit de démontrer le théorème suivant (théorème des valeurs intermédiaires) :

   Soit f une application continue de I dans $\mathbb{R}$. Alors f possède la propriété $\mathcal{P}$.

   Soit $(a,b)\in \mathrm{I}^2$ tel que $a<b$. La conclusion étant immédiate si $f(a)=f(b)$, on peut toujours supposer (quitter à remplacer f par $-f$) que $f(a)<f(b)$. Dans la suite on supposera cette hypothèse vérifiée.

   Soit $\lambda\in]f(a),f(b)[$.

   On considère les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $a_0=a$, $b_0=b$ et pour tout entier n,

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)<\lambda \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} \\ b_{n+1}=b_n \end{cases}$$

$$\text{si } f\left(\frac{a_n+b_n}{2}\right)\geqslant\lambda \text{ alors } \begin{cases} a_{n+1}=a_n \\ b_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2} \end{cases}$$

   (a) Justifier que, pour tout entier n, $a_n\in[a,b]$ et $b_n\in[a,b]$.

   (b) Montrer que, pour tout entier n : $b_{n+1}-a_{n+1}=\dfrac{b_n-a_n}{2}$.

   (c) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.

   (d) Conclure.

2. **Application 1 : un théorème du point fixe**

   Soient a et b deux réels tels que $a<b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a,b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a,b]$.

   Montrer qu'il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(c)=c$.

3. **Application 2**

   Soient f une fonction continue sur $[0,1]$ telle que $f(0)=f(1)$.

   (a) Montrer que pour tout entier n non nul, il existe $c_n\in\left[0,1-\dfrac{1}{n}\right]$ tel que :

$$f(c_n)=f\left(c_n+\frac{1}{n}\right)$$

   Aide: On pourra considérer la fonction f_n définie sur $\left[0,1-\frac{1}{n}\right]$ par $f_n(x)=f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)$ et écrire $f(1)-f(0)$ en fonction de f_n.

   (b) Montrer que si on remplace $\dfrac{1}{n}$ par un réel $\alpha\in]0,1[$ tel que $\dfrac{1}{\alpha}\notin\mathbb{N}$, le résultat précédent n'est plus vrai.

   Aide: On pourra considérer la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right)-x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right)-1\right]$.

4. **Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires**

   On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(0)=0$ et $f(x)=\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x\neq 0$.

   (a) Montrer que la fonction f n'est pas continue en 0.

   (b) Montrer que f vérifie la propriété $\mathcal{P}$. Conclure.