D'après CAPES de Mathématiques 2011

0. Question de cours : Soit $\varepsilon > 0$.
   L'application f étant continue en ℓ, on a $\lim\limits_{x\to\ell} f(x) = f(\ell)$. Par conséquent, il existe un $\eta > 0$ tel que :
   $$\forall x \in \mathrm{X}, |x-\ell| < \eta \implies |f(x) - f(\ell)| < \varepsilon \qquad (1)$$
   Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, il existe $\mathrm{N} \in \mathbb{N}$ tel que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathrm{N} \implies |u_n - \ell| < \eta \qquad (2)$$
   Comme il est précisé que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs dans X, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, dès que $n > \mathrm{N}$, $u_n \in \mathrm{X}$ et $|u_n - \ell| < \eta$ d'après (2).
   Par conséquent, en utilisant (1), on aura $|f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$.
   $$\text{Bilan : } \forall \varepsilon > 0, \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N}, \forall n \in \mathbb{N}, n \geqslant \mathrm{N} \implies |f(u_n) - f(\ell)| < \varepsilon$$
   C'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f(u_n) = f(\ell)$
1. **Démonstration du théorème des valeurs intermédiaires**
   (a) Montrons par récurrence que pour tout entier n, $a_n \in [a, b]$ et $b_n \in [a, b]$:
   — Pour $n = 0$, on a $a_0 = a$ et $b_0 = b$. Donc $a_0 \in [a, b]$ et $b_0 \in [a, b]$.
   — Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $a_n \in [a, b]$ et $b_n \in [a, b]$.
   Deux cas se présentent :
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$ alors par définition $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$.
   Par hypothèse de récurrence, on a $a \leqslant a_n \leqslant b$ et $a \leqslant b_n \leqslant b$.
   En additionnant, on obtient $2a \leqslant a_n + b_n \leqslant 2b$.
   En divisant par 2 (qui est strictement positif), $a \leqslant \dfrac{a_n + b_n}{2} \leqslant b$, i.e. $a \leqslant a_{n+1} \leqslant b$.
   On a encore $a_{n+1} \in [a, b]$.
   D'autre part, $b_{n+1} = b_n \in [a, b]$ par hypothèse de récurrence.
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$ alors par définition $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$.
   C'est exactement le même raisonnement, et on aboutit encore à $a_{n+1} \in [a, b]$ et $b_{n+1} \in [a, b]$.
   Dans tous les cas, la propriété est encore vraie au rang $n + 1$.
   $$\text{Bilan : } \forall n \in \mathbb{N}, a_n \in [a, b] \text{ et } b_n \in [a, b].$$
   (b) Soit $n \in \mathbb{N}$.
   Deux cas se présentent :
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$ alors par définition $\begin{cases} a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \\ b_{n+1} = b_n \end{cases}$.
   Dans ce cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = b_n - \dfrac{a_n + b_n}{2} = \dfrac{2b_n - (a_n + b_n)}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$ alors par définition $\begin{cases} a_{n+1} = a_n \\ b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} \end{cases}$.
   Dans ce cas, $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2} - a_n = \dfrac{(a_n + b_n) - 2a_n}{2} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.

   Dans tous les cas, on a bien $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2}$.
   $$\forall n \in \mathbb{N}, b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{2}$$
   (c) Lemme : démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, on a $a_n < b_n$.
   — Pour $n = 0$, on a d'après l'énoncé $a < b$, donc $a_0 < b_0$.
   — Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $a_n < b_n$.
   Alors, on a $b_n - a_n > 0$ et d'après la question précédente $b_{n+1} - a_{n+1} = \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0$.
   La propriété est encore vraie au rang suivant.
   On a établi que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}, a_n < b_n}$.

   Montrons maintenant que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   i. **La suite (a_n) est croissante**. En effet :
   Soit $n \in \mathbb{N}$
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$ alors $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, donc $a_{n+1} - a_n = \dfrac{b_n - a_n}{2} > 0$ d'après le lemme.
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$ alors $a_{n+1} = a_n$.
   Dans tous les cas, on a bien $a_{n+1} \geqslant a_n$.
   ii. **La suite (b_n) est décroissante**. En effet :
   Soit $n \in \mathbb{N}$
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$ alors $b_{n+1} = b_n$.
   — Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$ alors $b_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$, donc $b_{n+1} - b_n = \dfrac{a_n - b_n}{2} < 0$ d'après le lemme.
   Dans tous les cas, on a bien $b_{n+1} \leqslant b_n$.
   iii. **La différence $b_n - a_n$ tend vers 0**. En effet, d'après la question 2.b., la suite $(b_n - a_n)$ est géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$.
   La raison étant dans l'intervalle $]-1, 1[$, cette suite tend bien vers 0.

   Conclusion, les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (d) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant adjacentes, elles convergent toutes les deux vers une même limite c.
   Comme on a $\forall n \in \mathbb{N}, a \leqslant a_n \leqslant b$ (d'après la question 1.a.), par passage à la limite, on a également $a \leqslant c \leqslant b$.
   En utilisant la question 0., les suites convergeant vers $c \in [a, b]$, et la fonction f étant continue en c (puisque continue sur $[a, b]$), on peut en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} f(a_n) = f(c)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f(b_n) = f(c)$
   Montrons que $f(c) = \lambda$.
   i. On a $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) < \lambda$.
   En effet, par récurrence :
   — pour $n = 0$, on a $f(a_0) = f(a) < \lambda$ d'après l'énoncé.
   — Supposons qu'il existe un entier naturel n tel que $f(a_n) < \lambda$. Alors :
   Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) < \lambda$, on a posé $a_{n+1} = \dfrac{a_n + b_n}{2}$ et donc $f(a_{n+1}) < \lambda$.
   Si $f\left(\dfrac{a_n + b_n}{2}\right) \geqslant \lambda$ alors $a_{n+1} = a_n$, donc $f(a_{n+1}) = f(a_n) < \lambda$ par H.R.

Puisque $\forall n \in \mathbb{N}, f(a_n) < \lambda$, par passage à la limite, on a $\lim_{n\to+\infty} f(a_n) \leqslant \lambda$ i.e. $f(c) \leqslant \lambda$

ii. De même, on a $\forall n \in \mathbb{N}, f(b_n) \geqslant \lambda$, donc par passage à la limite, $\lim_{n\to+\infty} f(b_n) \geqslant \lambda$ et $f(c) \geqslant \lambda$

Au bilan, $f(c) = \lambda$. On a réussi à trouver un antécédent par f pour λ. Le théorème des valeurs intermédiaires est prouvé dans le cas présent, et donc dans le cas général d'après le préambule.

2. **Application 1 : un théorème du point fixe**

Soient a et b deux réels tels que $a < b$ et soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a, b]$ à valeurs dans l'intervalle $[a, b]$. Considérons l'application $\phi : \begin{array}{ccc} [a,b] & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & f(x) - x \end{array}$.

— ϕ est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a, b]$.

— $\phi(a) = f(a) - a \geqslant 0$ puisque f est à valeurs dans $[a, b]$.

— $\phi(b) = f(b) - b \leqslant 0$ puisque f est à valeurs dans $[a, b]$.

D'après ces trois points, en utilisant le théorème des valeurs intermédiaires, on peut conclure qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\phi(c) = 0$.

On a alors $f(c) - c = 0$, et encore $f(c) = c$ *i.e.* f admet bien un point fixe $c \in [a, b]$.

3. **Application 2** Soient f une fonction continue sur $[0, 1]$ telle que $f(0) = f(1)$.

(a) Considérons la fonction f_n définie sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ par $f_n(x) = f\left(x + \frac{1}{n}\right) - f(x)$.

On a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f_n\left(\frac{k}{n}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right) - f\left(\frac{k}{n}\right)\right] = f(1) - f(0) = 0$ (somme télescopique).

Par conséquent, on ne peut avoir ni $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f_n\left(\frac{k}{n}\right) > 0$ (sinon la somme serait strictement positive), ni $\forall k \in [\![0, n-1]\!], f_n\left(\frac{k}{n}\right) < 0$ (sinon la somme serait strictement négative).

Il existe donc deux entiers $k_1, k_2 \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $f_n\left(\frac{k_1}{n}\right) \leqslant 0$ et $f_n\left(\frac{k_2}{n}\right) \geqslant 0$.

La fonction f_n étant continue sur $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$ (comme somme et composée de fonctions continues), on en déduit d'après le *théorème des valeurs intermédiaires* qu'il existe un réel c_n entre $\frac{k_1}{n}$ et $\frac{k_2}{n}$ (donc dans l'intervalle $\left[0, 1 - \frac{1}{n}\right]$) tel que $f_n(c_n) = 0$.

En d'autres mots, $\exists c_n \in \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right], \quad f(c_n) = f\left(c_n + \frac{1}{n}\right)$.

(b) Montrons que si on remplace $\frac{1}{n}$ par un réel $\alpha \in]0, 1[$ tel que $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$, le résultat précédent n'est plus vrai.

Considérons à cet effet la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha}\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right]$.

On a bien f continue sur $[0, 1]$ (comme somme et composée de fonctions continues) et $f(0) = f(1)$.

$$\begin{aligned}\forall x \in [0, 1-\alpha], f(x+\alpha) &= \cos\left(\frac{2\pi(x+\alpha)}{\alpha}\right) - (x+\alpha)\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right] \\ &= \cos\left(\frac{2\pi x}{\alpha} + 2\pi\right) - x\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right] - \alpha\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right] \\ &= f(x) - \alpha\left[\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha}\right) - 1\right].\end{aligned}$$

Or, par hypothèse, on a $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{N}$ et même $\frac{1}{\alpha} \notin \mathbb{Z}$ puisque $\alpha > 0$.

Donc $\frac{2\pi}{\alpha} \notin 2\pi\mathbb{Z}$, et $\cos(2\pi\alpha) \neq 1$.

Par conséquent, $\alpha[\cos(2\pi\alpha) - 1] \neq 0$.

Ainsi, $\forall x \in [0, 1-\alpha], \quad f(x+\alpha) \neq f(x)$. CQFD.

4. **Réciproque du théorème des valeurs intermédiaires**

(a) Supposons que la fonction f soit continue en 0.

Considérons la suite (u_n) définie par $u_n = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}$.

Cette suite tend vers 0. Par caractérisation séquentielle de la continuité, on doit avoir $\lim_{n\to+\infty} f(u_n) = f(0) = 0$.

Or $\forall n \in \mathbb{N}, f(u_n) = \sin\left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right) = 1$. C'est absurde, cela contredit l'unicité de la limite !

Par conséquent, f n'est pas continue en 0.

(b) Pourtant, f vérifie la propriété $\mathcal{P}$.

En effet, prenons a, b deux réels positifs tels que $a < b$, considérons une valeur λ entre $f(a)$ et $f(b)$, et montrons qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

— Si $0 < a < b$: f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée de fonctions continues. On sait donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires que comme $0 < a < b$, il existe bien $c \in [a, b]$ tel que $f(c) = \lambda$.

— Même raisonnement si $a < b < 0$.

— Si $a \leqslant 0 < b$. Dans ce cas, λ est compris entre $f(a)$ et $f(b)$ donc $\lambda \in [-1, 1]$ (même si $a = 0$).

La suite $\left(\dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2n\pi}\right)$ définie précédemment est strictement positive et tend vers 0.

Il existe donc un rang N à partir duquel $0 < u_n < b$. En particulier $0 < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{N}\pi} < b$.

On a alors $a \leqslant 0 < \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\mathrm{N}\pi} < \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{N}\pi} < b$. Posons $v_\mathrm{N} = \dfrac{1}{\frac{3\pi}{2} + 2\mathrm{N}\pi}$ et toujours $u_\mathrm{N} = \dfrac{1}{\frac{\pi}{2} + 2\mathrm{N}\pi}$.

On a $a \leqslant 0 < v_\mathrm{N} < u_\mathrm{N} < b$. Or $f(v_\mathrm{N}) = -1$ et $f(u_\mathrm{N}) = 1$. La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}_+^*$, toutes les valeurs intermédiaires entre -1 et 1 sont atteintes entre v_N et u_N.

A fortiori, toutes les valeurs intermédiaires entre $f(a)$ et $f(b)$ sont atteintes entre a et b.

— Même raisonnement si $a < 0 \leqslant b$.

Dans tous les cas, on a prouvé que f vérifie la propriété des valeurs intermédiaires sur $\mathbb{R}_+$ alors qu'elle n'est pas continue sur cet intervalle. La réciproque du théorème des valeurs intermédiaires est donc fausse.

Remarque : Il existait des cas beaucoup plus simples de fonctions non continues vérifiant le théorème des valeurs intermédiaires. En trouver une !

On peut en particulier prouver que toute dérivée vérifie la propriété des valeurs intermédiaires (théorème de Darboux), alors qu'il existe des dérivées non continues. C'était l'objet de la suite de ce problème de CAPES.