Suites

Exercice 1 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par la $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \dfrac{2u_n - 1}{u_n + 4}$.

1 Résolvons l'équation $\gamma = \dfrac{2\gamma - 1}{\gamma + 4}$. -4 n'est pas solution.

$$\forall \gamma \in \mathbb{R}\setminus\{-4\}, \quad \gamma = \frac{2\gamma-1}{\gamma+4} \iff \gamma(\gamma+4) = 2\gamma - 1 \iff \gamma^2 + 2\gamma + 1 = 0$$
$$\iff (\gamma+1)^2 = 0 \iff \gamma = -1.$$

L'équation admet donc une unique solution $\gamma = -1$.

2 Considérons la fonction $f : x \mapsto \dfrac{2x-1}{x+4}$. f est définie et dérivable sur $D_f = \mathbb{R}\setminus\{-4\}$, et $\forall x \in D_f,\ f'(x) = \dfrac{9}{(x+4)^2} > 0$.

Par conséquent, f est strictement croissante sur les intervalles $]-\infty, -4[$ et $]-4, +\infty[$.

Posons $I =]-1, 1]$. On a alors $f(I) =]f(-1), f(1)] = \left]-1, \dfrac{1}{5}\right] \subset I$.

Comme $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
De plus, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$.

Comme f est croissante sur I, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est monotone. Or $u_0 = 1$ et $u_1 = f(u_0) = \dfrac{1}{5} < u_0$.

Par conséquent, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
Comme elle est par ailleurs minorée par -1 puisque $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, on en déduit que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ.
Comme f est continue sur I, ℓ vérifie $f(\ell) = \ell$.
D'après la question 1, on a donc $\ell = \gamma = -1$.

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = -1.$$

3 Comme $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in I$, on a en particulier $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > -1$. Par conséquent $\forall n \in \mathbb{N}, u_n + 1 \neq 0$.

On peut alors poser $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \dfrac{1}{u_n + 1}$, et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sera bien définie.

$$\text{De plus, } \forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{u_{n+1}+1} = \frac{1}{\frac{2u_n-1}{u_n+4}+1} = \frac{u_n+4}{(2u_n-1)+(u_n+4)} = \frac{u_n+4}{3u_n+3}$$
$$= \frac{(u_n+1)+3}{3u_n+3} = \frac{1}{3} + \frac{1}{u_n+1} = \frac{1}{3} + v_n.$$

Par conséquent la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$.

4 Comme $v_0 = \dfrac{1}{u_0+1} = \dfrac{1}{2}$, on en déduit que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3}n$.

Par conséquent, $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \dfrac{1}{v_n} - 1$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \dfrac{6}{3+2n} - 1 = \dfrac{3-2n}{3+2n}$.
On retrouve bien $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -1$.

Exercice 2 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k+1}$.

1 Posons pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = u_{2n}$ et $w_n = u_{2n+1}$.

① On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_{n+1} - v_n = u_{2n+2} - u_{2n} = \dfrac{(-1)^{2n+1}}{2n+2} + \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+3}$

$$= \frac{-1}{2n+2} + \frac{1}{2n+3} = \frac{-1}{(2n+2)(2n+3)} < 0.$$

Donc la suite (v_n) est décroissante.

② On a $\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_{n+1} - w_n = u_{2n+3} - u_{2n+1} = \dfrac{(-1)^{2n+2}}{2n+3} + \dfrac{(-1)^{2n+3}}{2n+4}$

$$= \frac{1}{2n+3} + \frac{-1}{2n+4} = \frac{1}{(2n+3)(2n+4)} > 0.$$

Donc la suite (w_n) est décroissante.

③ De plus $\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n - w_n = u_{2n} - u_{2n+1} = \dfrac{1}{2n+1}$.

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} (w_n - v_n) = 0$.

Des trois points précédents, on peut déduire que (v_n) et (w_n) sont adjacentes.
Les suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) convergent donc vers une même limite ℓ.

2 Les indices pairs et impairs formant une partition de $\mathbb{N}$, la convergence des suites (u_{2n}) et (u_{2n+1}) vers la même limite ℓ entraîne celle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\lim_{n\to+\infty} (u_n) = \ell.$$

3 Comme (u_{2n}) décroît strictement et tend vers ℓ, on peut déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n} > \ell$.
De même, on a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < \ell$.
On dispose donc de $\forall n \in \mathbb{N}, u_{2n+1} < \ell < u_{2n}$, ce qui fournit un encadrement de ℓ d'amplitude

$$u_{2n} - u_{2n+1} = \frac{1}{2n+2}.$$

Le milieu de $[u_{2n+1}, u_{2n}]$ i.e. $\dfrac{u_{2n+1} + u_{2n}}{2}$ est donc une valeur approchée de ℓ à la précision

$$\frac{u_{2n} - u_{2n+1}}{2} = \frac{1}{2\times(2n+2)}.$$

Il suffit donc de choisir n tel que $\dfrac{1}{2\times(2n+2)} < 10^{-3}$ pour avoir une valeur approchée à la précision 10^{-3}.

Or, $\dfrac{1}{2\times(2n+2)} < 10^{-3} \iff 2\times(2n+2) > 10^3 \iff n+1 > 250 \iff n > 249$.

Pour $n = 250$, $\dfrac{u_{501} + u_{500}}{2}$ est une valeur approchée de ℓ à la précision 10^{-3}.

Remarque : On peut prouver que $\ell = \ln 2$.

Exercice 3 :

1 Posons $f_n : x \mapsto x^n - nx + 1$.

- f_n est **continue** sur l'**intervalle** $[0\,;1]$;
- f_n est dérivable sur l'intervalle $[0\,;1]$ et $\forall x \in [0,1],\ f_n'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) \leqslant 0$.
  De plus, $\forall x \in [0\,;1], \quad f_n'(x) = 0 \iff x = 1$.
  La dérivée est négative sur l'intervalle $[0\,;1]$ et elle ne s'annule qu'en un point isolé.
  Donc f_n est **strictement décroissante** sur $[0\,;1]$.
- $f_n(0) = 1$ et $f_n(1) = 2 - n \leqslant 0$.

D'après le théorème de la bijection,

$$\text{L'équation } f_n(x) = 0 \text{ admet une unique solution } \alpha_n \text{ sur } [0\,;1].$$

Remarque :

- Si $n = 2$, on a $f_2(1) = 0$. Donc $\alpha_2 = 1$.
- Si $n = 3$, on a $f_3(1) = -1$. Donc $\alpha_3 \in]0\,;1[$.

2 On va montrer que $\forall x \in [0\,;1],\ n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad f_{n+1}(x) \leqslant f_n(x)$.
En effet,

$$\begin{aligned}\forall x \in [0\,;1]\,, \forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}\,, \quad f_{n+1}(x) - f_n(x) &= [x^{n+1} - (n+1)x + 1] - [x^n - nx + 1] \\ &= x^{n+1} - x^n - x \\ &= x^n(x-1) - x \leqslant 0\end{aligned}$$

Posons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
D'après la propriété précédente, on a $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) \leqslant f_n(\alpha_{n+1})$.
Or, $f_{n+1}(\alpha_{n+1}) = 0$ par définition de α_{n+1}, d'où $0 \leqslant f_n(\alpha_{n+1})$.
De même, par définition de α_n, on a $f_n(\alpha_n) = 0$.
On peut écrire :

$$f_n(\alpha_n) \leqslant f_n(\alpha_{n+1})$$

Si on avait $\alpha_n < \alpha_{n+1}$, la fonction f_n étant strictement décroissante, on pourrait en déduire que $f_n(\alpha_n) > f_n(\alpha_{n+1})$. C'est absurde ! Donc $\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$.
On vient de démontrer que la suite (α_n) est décroissante.
Par ailleurs, elle est minorée par 0.
Donc cette suite est convergente.
Soit ℓ la limite de (α_n).
Comme $\forall n \geqslant 2, \quad u_n \in [0\,;1]$, par passage à la limite, on a $\ell \in [0\,;1]$.
On peut même préciser que comme la suite est décroissante, on a $\forall n \geqslant 3, \quad \alpha_n \leqslant \alpha_3$.
Et par passage à la limite, $\ell \leqslant \alpha_3 < 1$.
D'où $\ell \in [0\,;1[$.
Supposons que $\ell \in]0\,;1]$.
Par définition de (α_n), on a

$$\forall n \geqslant 2, \quad \alpha_n^n + 1 = n\alpha_n \quad (1)$$

Comme $\begin{cases} \lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell < 1 \\ \lim\limits_{x\to\ell} \ln x = \ln(\ell) \end{cases}$ on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(\alpha_n) = \ln(\ell) < 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} n\ln(\alpha_n) = -\infty$.
Par composition, on en déduit $\lim\limits_{n\to+\infty} e^{n\ln(\alpha_n)} = 0$, i.e. $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n^n = 0 \implies \lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n^n + 1) = 1$.
On en conclut que $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = \lim\limits_{n\to+\infty} (\alpha_n^n + 1) = 1$.
Mais $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = \ell > 0$ donc par produit, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = +\infty$. C'est absurde ! D'où $\ell = 0$.

$$\text{En conclusion, } \lim_{n\to+\infty} \alpha_n = 0.$$

Remarques :

- En particulier, $\lim\limits_{n\to+\infty} n\alpha_n = 1 \iff \alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

- Une autre rédaction plus rapide mais plus artificielle :
  Soit $\mathrm{A} \in]0,1[$.
  On a $f_n(\mathrm{A}) = \mathrm{A}^n - n\mathrm{A} + 1 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
  Donc il existe un rang N tel que $\forall n \geqslant \mathrm{N}, f_n(\mathrm{A}) < 0$.
  Comme f_n est décroissante et $f_n(\alpha_n) = 0$, on a donc $0 \leqslant \alpha_n \leqslant \mathrm{A}$.
  En conclusion, $\forall \mathrm{A} \in]0,1[,\ \exists \mathrm{N} \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant \mathrm{N}, \quad |\alpha_n| \leqslant \mathrm{A}$, *i.e.* par définition, $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

(le cas des $\mathrm{A} \geqslant 1$ étant vrai *a fortiori*)