Nombres Complexes II

Exercice 1 : Soit ϕ la fonction qui à tout nombre complexe z associe, lorsque c'est possible, le nombre

$$\phi(z) = \frac{z^2}{z - 2i}$$

1 Déterminer l'ensemble de définition de ϕ.

2 ① Déterminer les racines carrées de $8 - 6i$

② En déduire les antécédents de $1 + i$ par ϕ.

3 ① Soit $b \in \mathbb{C}$.
Discuter, selon les valeurs de b, le nombre d'antécédents de b par ϕ.

② Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$ des points d'affixe z tels que $\phi(z) \in i\mathbb{R}$.
Le représenter.

Exercice 2 : Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormal $(0; \vec{e_1}, \vec{e_2})$.

On désigne par A le point d'affixe $2i$ et on considère enfin l'application f de $\mathcal{P} \setminus \{A\}$ dans $\mathcal{P} \setminus \{A\}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M$'$ d'affixe z' défini par :

$$z' = f(z) = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$$

1 Montrer qu'il existe deux points B et C invariants par f.

2 Montrer que pour tout point $M_1 \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$, il existe un unique point $M_0 \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ tel que $M_1 = f(M_0)$.
Que peut-on dire de f ?

3 Donner une expression de l'application $f^{-1} : M_1 \mapsto M_0$.
Que remarque-t-on ?

4 On note $\mathcal{D}$ l'axe des ordonnées privé de A.
Montrer que si $M \in \mathcal{D}$, alors $M' = f(M)$ est également situé sur $\mathcal{D}$.
On dit que $\mathcal{D}$ est *globalement invariant* par f.

5 ① Montrer que si $z \neq 2i$, alors $|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9$

② En déduire l'image par f du cercle Γ de centre A et de rayon $r > 0$.

③ Déterminer r pour que Γ soit globalement invariant par f.