Une jolie courbe et des tangentes

Exercice 1 : On peut toujours factoriser l'équation du cercle :

$$\mathscr{C}: \quad (x-3)^2+(y+1)^2=5.$$

C'est le cercle de centre $\Omega\,(3;\,-1)$ et de rayon $\sqrt{5}$.

Le point $\mathrm{M}\,(x;\,y)$ est un point de $\mathscr{C}$ par lequel passe une tangente issue de A s'il vérifie l'équation du cercle et la condition

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}.\overrightarrow{\Omega\mathrm{M}}=0 \iff (x-4)(x-3)+(y+4)(y+1)=0.$$

Les coordonnées d'un tel point sont donc solutions du système :

$$\begin{cases} (x-3)^2+(y+1)^2 = 5 \\ (x-4)(x-3)+(y+4)(y+1) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2+y^2 = 6x-2y-5 \\ x^2+y^2-7x+5y+16 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+y^2-6x+2y+5 = 0 \\ -x+3y+11 = 0 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x^2+y^2-6x+2y+5 = 0 \\ x = 3y+11 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} (3y+11)^2+y^2-6(3y+11)+2y+5 = 0 \\ x = 3y+11 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1\cancel{0}y^2+5\cancel{0}y+6\cancel{0} = 0 \\ x = 3y+11 \end{cases}$$

On résout la première équation dont les solutions en évidence sont $y_1=-2$ et $y_2=-3$ associées à leur abscisse :

$$x_1=3y_1+11=5 \qquad \text{et} \qquad x_2=3y_2+11=2.$$

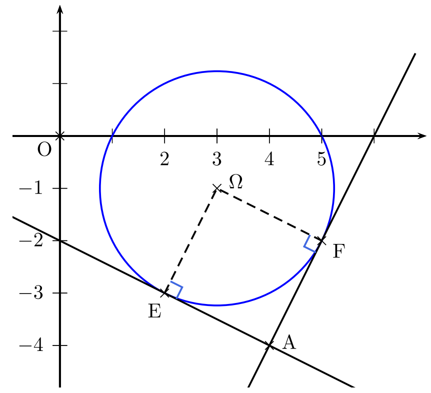
Il y a donc deux points convenables :

$$\mathrm{E}\,(2;\,-3) \qquad \text{et} \qquad \mathrm{F}\,(5;\,-2)\,.$$

Il ne reste plus aux courageux qu'à calculer la distance entre les deux points (au carré pour commencer) :

$$\mathrm{EF}^2=(x_\mathrm{F}-x_\mathrm{E})^2+(y_\mathrm{F}-y_\mathrm{E})^2=10.$$
$$\mathrm{EF}=\sqrt{10}\simeq 3,16.$$

À vous de vérifier la crédibilité de ce résultat sur la figure ci-dessous :



Exercice 2 :

1 (1) Le point H appartient à la droite $(\mathscr{D})$ d'équation $y=-1$ donc $y_\mathrm{H}=-1$. De plus, par projection orthogonale sur $(\mathscr{D})$, perpendiculaire à l'axe des abscisses, la droite (MH) est parallèle à l'axe des ordonnées donc $x_\mathrm{H}=x$ et on a :

$$\mathrm{H}\,(x;\,-1)\,.$$

(2) On a :

$$\mathrm{MF}=\sqrt{(x_\mathrm{F}-x_\mathrm{M})^2+(y_\mathrm{F}-y_\mathrm{M})^2}=\sqrt{x^2+(1-y)^2}$$

et

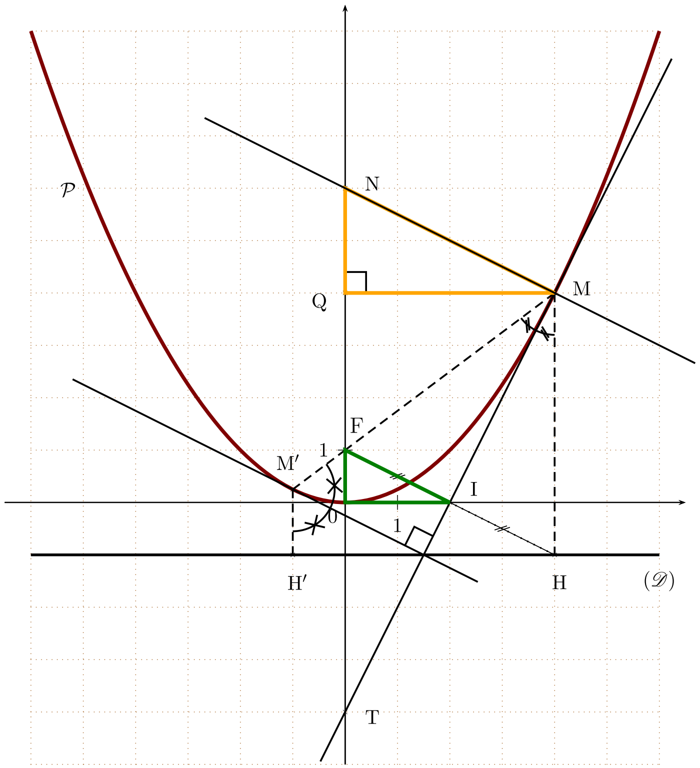
$$\mathrm{MH}=\sqrt{(x_\mathrm{H}-x_\mathrm{M})^2+(y_\mathrm{H}-y_\mathrm{M})^2}=\sqrt{(1+y)^2}.$$

(3) Il suffit de résoudre l'équation :

$$\begin{aligned} \mathrm{MF}=\mathrm{MH} &\iff \mathrm{MF}^2=\mathrm{MH}^2 && \left(\begin{array}{c}\text{car MF et MH sont des}\\ \text{longueurs donc positives}\end{array}\right) \\ &\iff x^2+(1-y)^2=(1+y)^2 \\ &\iff x^2=(1+y)^2-(1-y)^2 && \text{(on factorise et simplifie)} \\ &\iff x^2=2\times 2y \iff \boxed{y=\frac{x^2}{4}}. \end{aligned}$$

La succession d'équivalence précédente montre donc bien que M appartient à $\mathcal{P}$ si, et seulement si, $y=\dfrac{x^2}{4}$. C'est une parabole.

2 (1)



② Comme M et M′ appartiennent à $\mathscr{P}$, on a M (4; 4) et M′ $\left(-1;\ \frac{1}{4}\right)$. Puis, le même raisonnement qu'en (1) donne H (4; −1) et M′ (−1; −1).

③ $\overrightarrow{\mathrm{FM}} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{M} - x_\mathrm{F} \\ y_\mathrm{M} - y_\mathrm{F} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 4-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{FM'}} = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{4} - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$

$$= -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{FM}}.$$

Donc les vecteurs sont colinéaires et les points M, M′ et F sont alignés.

④ La droite (Δ) passe par M et le milieu I de [FH] par définition. L'équation cherchée est de la forme $y = mx + p$.

— On commence par trouver les coordonnées de I : I $\begin{pmatrix} \frac{x_\mathrm{F} + x_\mathrm{H}}{2} \\ \frac{y_\mathrm{F} + y_\mathrm{H}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$.

— Calculons le coefficient directeur de (Δ) : $m = \dfrac{y_\mathrm{M} - y_\mathrm{I}}{x_\mathrm{M} - x_\mathrm{I}} = 2$.

— Enfin $\mathrm{I} \in \Delta \iff y_\mathrm{I} = 2x_\mathrm{I} + p \iff p = -2x_\mathrm{I} = -4$.

Donc $\boxed{(\Delta):\ y = 2x - 4}$.

Avec le même raisonnement, on trouve $\boxed{(\Delta'):\ y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}}$.

Le produit des coefficients directeurs de (Δ) et (Δ′) est égal à −1 donc les droites sont perpendiculaires.

⑤ Soit D = (Δ) ∩ (Δ′), on résout le système d'équation :

$$\begin{cases} y &= 2x - 4 \\ y &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} y &= 2x - 4 \\ 4y &= -2x - 1 \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} y &= -1 \\ x &= \frac{3}{2} \end{cases}$$

Donc D $\left(\frac{3}{2};\ -1\right) \in (\mathscr{D})$.

⑥ i. On note (Δ″), la perpendiculaire à (Δ) en M. Comme elle est parallèle à (Δ′) alors son coefficient directeur est $-\frac{1}{2}$. De plus, elle passe par M :

$$y_\mathrm{M} = -\frac{1}{2}x_\mathrm{M} + p \iff p = 4 + \frac{1}{2} \times 4 = 6.$$

Donc $\boxed{(\Delta''):\ y = -\frac{1}{2}x + 6}$.

ii. T et N sont les ordonnées à l'origine respectives de (Δ″) et (Δ), donc

$$\boxed{\mathrm{T}\,(0;\ 6)} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathrm{N}\,(0;\ -4)}.$$

iii. Le milieu de [NT] a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \frac{x_\mathrm{N} + x_\mathrm{T}}{2} \\ \frac{y_\mathrm{N} + y_\mathrm{T}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \mathrm{F}$.

Donc F est le milieu de [NT].

3 La transformation qui transforme le triangle MNQ en le triangle IFO est une **homothétie de centre T et de rapport 2**. En effet :

— Par construction, les points T, O et Q, T, F et N et T, I et M sont alignés.

— D'après (2 (6)iii), F est le milieu de [TN] donc $\overrightarrow{\mathrm{TN}} = 2\overrightarrow{\mathrm{TF}}$.

$$\overrightarrow{\mathrm{TI}} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{I} - x_\mathrm{T} \\ y_\mathrm{I} - y_\mathrm{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{TM}} = \begin{pmatrix} x_\mathrm{M} - x_\mathrm{T} \\ y_\mathrm{M} - y_\mathrm{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = 2\overrightarrow{\mathrm{TI}}.$$

Enfin, de la même manière $\overrightarrow{\mathrm{TQ}} = 2\overrightarrow{\mathrm{TO}}$.