Analyse asymptotique

Exercice 1 :

1
$$\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \underset{x\to0}{=} \sqrt{1+\left(1+\frac{x}{2}-\frac{1}{8}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)} \underset{x\to0}{=} \sqrt{2}\sqrt{1+\underbrace{\frac{x}{4}-\frac{1}{16}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)}_{=\mathrm{o}(1)}}$$
$$\underset{x\to0}{=} \sqrt{2}\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x}{4}-\frac{1}{16}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)\right)-\frac{1}{8}\left(\frac{x}{4}-\cancel{\frac{1}{16}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)}\right)^2\right)$$
$$\underset{x\to0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\times16}+\frac{1}{8\times16}\right)x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$
$$\underset{x\to0}{=} \sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{8}x-\frac{5\sqrt{2}}{128}x^2+\mathrm{o}\left(x^2\right)$$

2 $(1+\sin x)^{\cos(2x)-1} = e^{\left(\cos(2x)-1\right)\ln\left(1+\sin(x)\right)}$
$$\underset{x\to0}{=} e^{\left(-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\ln\left(1+\underbrace{x-\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}\left(x^4\right)}_{\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(1)}\right)}$$
$$\underset{x\to0}{=} e^{\left(-2x^2+\frac{2}{3}x^4+\mathrm{o}\left(x^4\right)\right)\left(x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\mathrm{o}\left(x^3\right)\right)}$$
$$\underset{x\to0}{=} e^{\underbrace{-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)}_{\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(1)}}$$
$$\underset{x\to0}{=} 1+\left(-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)+\cancel{\underbrace{\frac{1}{2}\left(-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2}_{\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(x^6)}}$$
$$\underset{x\to0}{=} 1-2x^3+x^4+\frac{1}{3}x^5+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$

3 La fonction $f\,:\,x\longmapsto\arctan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$ est de classe au moins $\mathcal{C}^2$ sur un voisinage de -1 (il suffit d'éviter -2).

Elle est, en particulier, dérivable et sa dérivée admet un développement limité que l'on va primitiver pour obtenir celui de f : On a :

$$\forall x\neq-2,\ f'(x)=\frac{3}{(2+x)^2}\times\frac{1}{1+\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)^2}=\frac{3}{(2+x)^2+(2x+1)^2}=\frac{3}{5+8x+5x^2}$$
$$\underset{x=h-1}{=} \frac{3}{2-2h+5h^2}=\frac{3}{2}\,\frac{1}{1-h+\frac{5}{2}h^2}$$
$$\underset{h\to0}{=} \frac{3}{2}\left(1+h+\mathrm{o}\left(h\right)\right)\underset{h\to0}{=}\frac{3}{2}+\frac{3}{2}h+\mathrm{o}\left(h\right).$$
$$f(x)\underset{h\to0}{=} f(-1)+\frac{3}{2}h+\frac{3}{4}h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)$$
$$\underset{x\to-1}{=} -\frac{\pi}{4}+\frac{3}{2}(x+1)+\frac{3}{4}(x+1)^2+\mathrm{o}\left((x+1)^2\right)$$

Remarque : S'attaquer directement et comme usuellement à $\arctan\left(\dfrac{2x+1}{x+2}\right)$ amène à un cul de sac technique et nous aurait de toute manière obligé à utiliser la formule de Taylor-Young :

$$\arctan\left(\frac{2x+1}{x+2}\right)\underset{x=h-1}{=}\arctan\left(\frac{2h-1}{h+1}\right)\underset{h\to0}{=}\arctan\left((-1+2h)(1-h+h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right)$$
$$\underset{h\to0}{=}\arctan\left(-1+3h-3h^2+\mathrm{o}\left(h^2\right)\right)\ldots???$$

Pas de formules trigonométriques pour nous aider à nous ramener en 0.

4
$$\frac{1-\cos(x)}{\cosh(x)-1}\underset{x\to0}{=}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right)\times\frac{1}{\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{720}x^6+\mathrm{o}\left(x^7\right)}$$
$$\underset{x\to0}{=}\left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\frac{1}{1+\underbrace{\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)}_{\underset{x\to0}{=}\mathrm{o}(1)}}$$
$$\underset{x\to0}{=}\left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(1-\left(\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)+\left(\frac{1}{12}x^2+\cancel{\frac{1}{360}x^4}+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)^2\right)$$
$$\underset{x\to0}{=}\left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{360}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)\times\left(1-\frac{1}{12}x^2+\frac{1}{240}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)\right)$$
$$\underset{x\to0}{=}1-\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{12}\right)x^2+\left(\frac{1}{240}+\frac{1}{144}+\frac{1}{360}\right)x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$
$$\underset{x\to0}{=}1-\frac{1}{6}x^2+\frac{1}{72}x^4+\mathrm{o}\left(x^5\right)$$

Exercice 2 :

1 La seule difficulté est de pousser assez loin les DLs respectifs.

$$\sin(\tan(x))\underset{x\to0}{=}\sin\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)\right)$$
$$\underset{x\to0}{=}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)-\frac{1}{3!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\cdots\right)^3+\frac{1}{5!}\left(x+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)^5-\frac{1}{7!}\left(x+\cdots\right)^7+\mathrm{o}\left(x^7\right)$$
$$\underset{x\to0}{=}\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7\right)-\frac{1}{3!}\left(x^3+x^5+\frac{2}{5}x^7+\frac{1}{3}x^7\right)+\frac{1}{5!}\left(x^5+\frac{5}{3}x^7\right)-\frac{1}{7!}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right).$$

Donc, $\sin(\tan(x))\underset{x\to0}{=}x+\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{1}{40}x^5-\dfrac{55}{1008}x^7+\mathrm{o}\left(x^7\right).$

Et,

$$\begin{aligned}
\tan(\sin(x)) &\underset{x\to 0}{=} \tan\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7} + \mathrm{o}\left(x^7\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \frac{1}{3}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots\right)^3 + \frac{2}{15}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)^5 \\
&\qquad - \frac{17}{315}(x + \cdots)^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!}\right) + \frac{1}{3}\left(x^3 - \frac{1}{2}x^5 + \frac{3}{5!}x^7 + \frac{1}{12}x^7\right) + \frac{2}{15}\left(x^5 - \frac{5}{3!}x^7\right) \\
&\qquad - \frac{17}{315}x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right).
\end{aligned}$$

Donc, $\sin(\tan(x)) \underset{x\to 0}{=} x + \dfrac{1}{6}x^3 - \dfrac{1}{40}x^5 - \dfrac{107}{5040}x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right)$.

Par conséquent, $\tan(\sin(x)) - \tan(\sin(x)) = -\dfrac{1}{30}x^7 + \mathrm{o}\left(x^7\right)$.

D'où $\dfrac{\sin(\tan(x)) - \tan(\sin(x))}{x^7} = -\dfrac{1}{30} + \mathrm{o}(1)$.

Donc,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(\tan x) - \tan(\sin x)}{x^7} = -\frac{1}{30}.$$

2 On pose $\phi : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1+t^4}}$.

On a alors $\phi(x) \underset{x\to 0}{=} (1+t^4)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2}x^4 + \dfrac{3}{8}x^8 + \mathrm{o}\left(x^9\right)$.

La fonction ϕ étant continue sur $\mathbb{R}$, d'après le théorème fondamental de l'analyse :

$\Phi : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ est la primitive de ϕ s'annulant en 0.

Par intégration du DL de ϕ, on obtient : $\Phi(x) \underset{x\to 0}{=} 0 + x - \dfrac{1}{10}x^5 + \dfrac{1}{24}x^9 + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)$.

$$\begin{aligned}
\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} &= \Phi(x^2) - \Phi(x) \\
&\underset{x\to 0}{=} \left[x^2 - \frac{1}{10}x^{10} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)\right] - \left[x - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{24}x^9 + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)\right]
\end{aligned}$$

Donc,

$$\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} \underset{x\to 0}{=} -x + x^2 + \frac{1}{10}x^5 - \frac{1}{24}x^9 - \frac{1}{10}x^{10} + \mathrm{o}\left(x^{10}\right)$$

Remarque : on peut aussi poser $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} = \int_0^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}} - \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$.

On dérive : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = 2x \times \dfrac{1}{\sqrt{1+x^8}} - \dfrac{1}{\sqrt{1+x^4}}$, on fait le $\mathrm{DL}_9(0)$, puis on intègre.

3 (1)
- f est **continue** sur I comme somme de fonctions continues ;
- f est dérivable sur I et $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(x) = 1 - \sin x > 0$ sur I. Donc f est **strictement croissante** sur I.
- $\displaystyle\lim_{x\to -\frac{3\pi}{2}} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$ et $\displaystyle\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} f(x) = \frac{\pi}{2}$.

D'après le théorème de la bijection, on en déduit que f est bijective.

(2) Comme f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I, de dérivée ne s'annule pas, sa réciproque est également de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I.

Première méthode : D'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f^{-1} admet un DL à tout ordre en 1.

En particulier, $f^{-1}(1+h) \underset{h\to 0}{=} f^{-1}(1) + (f^{-1})'(1)h + \dfrac{(f^{-1})^{(2)}(1)}{2}h^2 + \dfrac{(f^{-1})^{(3)}(1)}{3!}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right)$.

Or :
- $f^{-1}(1) = 0$ car $f(0) = 1$.
- $(f^{-1})'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ d'où $(f^{-1})'(1) = \dfrac{1}{f'(0)} = \dfrac{1}{1} = 1$.
- $(f^{-1})^{(2)}(x) = -\dfrac{(f^{-1})'(x) f^{(2)}(f^{-1}(x))}{[f'(f^{-1}(x))]^2}$ d'où $(f^{-1})^{(2)}(1) = 1$.

Mais le calcul des dérivées successives de f^{-1} est pénible...

Deuxième méthode : D'après le théorème de Taylor-Young, la fonction f^{-1} admet un DL à l'ordre 3 en 1, qu'on pose a priori :

$$f^{-1}(1+h) \underset{h\to 0}{=} a_0 + a_1 h + a_2 h^2 + a_3 h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

Par composition des DL :

$$\begin{aligned}
f^{-1}(f(x)) &= f^{-1}(x + \cos x) \\
&\underset{x\to 0}{=} f^{-1}\left(1 + x - \frac{x^2}{2} + \mathrm{o}\left(x^3\right)\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1\left(x - \frac{x^2}{2}\right) + a_2\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^2 + a_3\left(x - \frac{x^2}{2}\right)^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right) \\
&\underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + \left[a_2 - \frac{a_1}{2}\right]x^2 + [a_3 - a_2]\,x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)
\end{aligned}$$

Mais par ailleurs $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f^{-1}(f(x)) = x$, d'où $f^{-1}(f(x)) \underset{x\to 0}{=} x + \mathrm{o}\left(x^3\right)$.

Par unicité de la partie régulière du DL en 0, on en déduit :

$$\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 - \dfrac{a_1}{2} = 0 \\ a_3 - a_2 = 0 \end{cases}, \text{ i.e. } \begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_2 = \dfrac{1}{2} \\ a_3 = \dfrac{1}{2} \end{cases} \quad \text{donc } f^{-1}(1+h) \underset{h\to 0}{=} h + \frac{1}{2}h^2 + \frac{1}{2}h^3 + \mathrm{o}\left(h^3\right).$$

Remarque : on peut aussi utiliser $\forall x \in \mathrm{I}, \quad f(f^{-1}(x)) = x$, mais la composition fait apparaître un système **non linéaire**, beaucoup moins pratique à résoudre.

Exercice 3 :

1 $\mathrm{D}_g =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$.

2 $\begin{cases} (x^2+1)\ln\left(\dfrac{x+1}{x}\right) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x \\ \dfrac{x^2+x+1}{x+1} \underset{x\to 0}{\sim} 1 \underset{x\to 0}{=} \mathrm{o}\left(-\ln x\right) \end{cases}$ donc $g(x) \underset{x\to 0}{\sim} -\ln x$ et $\displaystyle\lim_{x\to 0} g(x) = +\infty$.

3 On pose $x = -1 - h$ (avec $h > 0$).

$$g(-1-h) = (2 + 2h + h^2)[\ln(h) - \ln(1+h)] - \frac{1}{h} - 1 - h$$

$$\begin{cases} (2 + 2h + h^2)[\ln(h) - \ln(1+h)] \underset{h\to 0}{\sim} 2\ln h \\ -\dfrac{1}{h} - 1 - h \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{h} \end{cases}$$

or, $2\ln h \underset{h\to 0}{=} \mathrm{o}\left(-\dfrac{1}{h}\right)$.

Donc $g(-1-h) \underset{h\to 0}{\sim} -\dfrac{1}{h}$ et $\lim\limits_{x\to -1} g(x) = -\infty$.

4 $g(x) \underset{x\to\infty}{=} 2x - \dfrac{1}{2} + \dfrac{7}{3x} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

Donc, $(\mathscr{D}) :\ y = 2x - \dfrac{1}{2}$ est asymptote à $\mathcal{C}_g$ au voisinage de $\pm\infty$.

$\mathcal{C}_g$ est localement située au-dessus de $(\mathscr{D})$ au voisinage de $+\infty$ et en dessous au voisinage de $-\infty$.