Analyse asymptotique - Suites - Complexes

Exercice 1 : Dans un repère orthonormal direct, on considère les points A $(-1;\ -1)$, B $(2;\ 3)$ et C $(3;\ -3)$.

1. Calculer l'aire du triangle ABC.
2. En déduire la distance de A à la droite (BC).
3. Déterminer une équation de la droite (AB).
4. En déduire la longueur de la hauteur issue de C, et retrouver ainsi l'aire du triangle ABC.

Exercice 2 : Dans un repère orthonormé direct, on s'intéresse dans cet exercice à l'application définie sur $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ par $f(z) = \dfrac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$ et on nomme les points $\mathrm{A}(-\mathrm{i})$ et $\mathrm{B}(2+\mathrm{i})$.

Le graphisme donné en annexe devra être complété au fur et à mesure de l'avancement de l'exercice. Un choix judicieux de couleurs ou de codages afin de faciliter la correction sera apprécié dans la notation ;-).

1. Calculer les images par f de 1, de $3\mathrm{i}$ et de $1-2\mathrm{i}$ (on exprimera ces images sous forme algébrique).
2. Calculer les antécédents éventuels par f de 0, de 1 et de i (toujours sous forme algébrique).
3. Montrer que l'application f effectue une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-\mathrm{i}\}$ vers $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, et donner une expression explicite de sa réciproque f^{-1}.
4. Questions préliminaires :
   (a) *Question de cours :* rappeler la définition de $\mathbb{U}$. Le représenter sur le graphique.
   (b) Déterminer les racines carrées de $-8-6\mathrm{i}$.
   (c) Pour tout point $\mathrm{M} \neq \mathrm{A}$ du plan d'affixe z, exprimer l'angle orienté $\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\ \overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)$ en fonction de $f(z)$.
   (d) Déterminer l'ensemble des nombres complexes z invariants par l'application f et placer les points Ω_i correspondant sur le graphique.
5. (a) La transformation du plan complexe associée à f peut-elle être une des quatre isométries usuelles du plan ? Pourquoi ?
   (b) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{R}$.
   (c) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
   (d) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des nombres complexes z tels que $f(z) \in \mathbb{U}$ (on peut représenter les ensembles des questions 5, 6 et 7 sur un même schéma).
   (e) Montrer que, si $z \in \mathbb{U}$, son image $f(z)$ appartient à une droite à préciser.
6. Montrer que l'image par f du cercle de centre A et de rayon 1 est un cercle de centre C(1) dont on précisera le rayon.

Rappels : Le graphique en annexe devra comporter les points A, B et C, les points Ω_i, l'ensemble $\mathbb{U}$ ainsi que les ensembles des questions 5. et 6..

Exercice 3 : On note f l'application définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = x - \ln(1+x^2),$$

et $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

I. Étude de f et tracé de $\mathscr{C}$.

1. (a) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f.
   (c) Calculer $f''(x)$ et résoudre l'équation $f''(x) = 0$.
   Interprétation graphique.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$. On pensera à effectuer un changement de variable adéquat en $+\infty$.

3. (a) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 0 de $f(x)$.
   (b) Calculer le développement limité à l'ordre 2 en 1 de $f(x)$.
   (c) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}$ en 0 et préciser la position de la courbe par rapport à celles-ci.

4. Tracer la courbe $\mathscr{C}$ dans un repère d'unité 2 centimètres, en précisant les tangentes à $\mathscr{C}$ à l'origine, ainsi qu'aux points dont les abscisses vérifient $f''(x) = 0$.

II. Étude de suites associées à f.
On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

6. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Montrer la convergence de la suite et déterminer sa limite.

8. Sur le graphique de la question (4.), représenter rapidement quelques termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

9. (a) *Question de cours :* Énoncer le théorème des accroissements finis.
   (b) En déduire qu'il $c_h \in]0\,;h[$ tel que $\dfrac{\ln(1+h)}{h} = \dfrac{1}{1+c_h}$.

10. (a) Établir que, $\forall\, x \in [0\,;1]$, $f(x) \leqslant x - \dfrac{1}{2}x^2$.
    (b) En déduire que, $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1})$.
    (c) En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} u_k^2$ existe.

Exercice 4 : On appelle *fonction dilatante* une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad |f(x) - f(y)| \geqslant |x - y|$$

On rappelle qu'un *point fixe* de f est un réel x qui vérifie $f(x) = x$.

1. (a) À quelle condition une fonction affine est-elle dilatante ?
   (b) Donner un exemple de fonction dilatante non monotone.

Dans toute la suite du problème, f désigne une fonction dilatante et <u>continue</u> sur $\mathbb{R}$.

2. (a) Montrer que f est injective.
   (b) Montrer que f est strictement monotone.
   (c) Montrer que f est bijective.

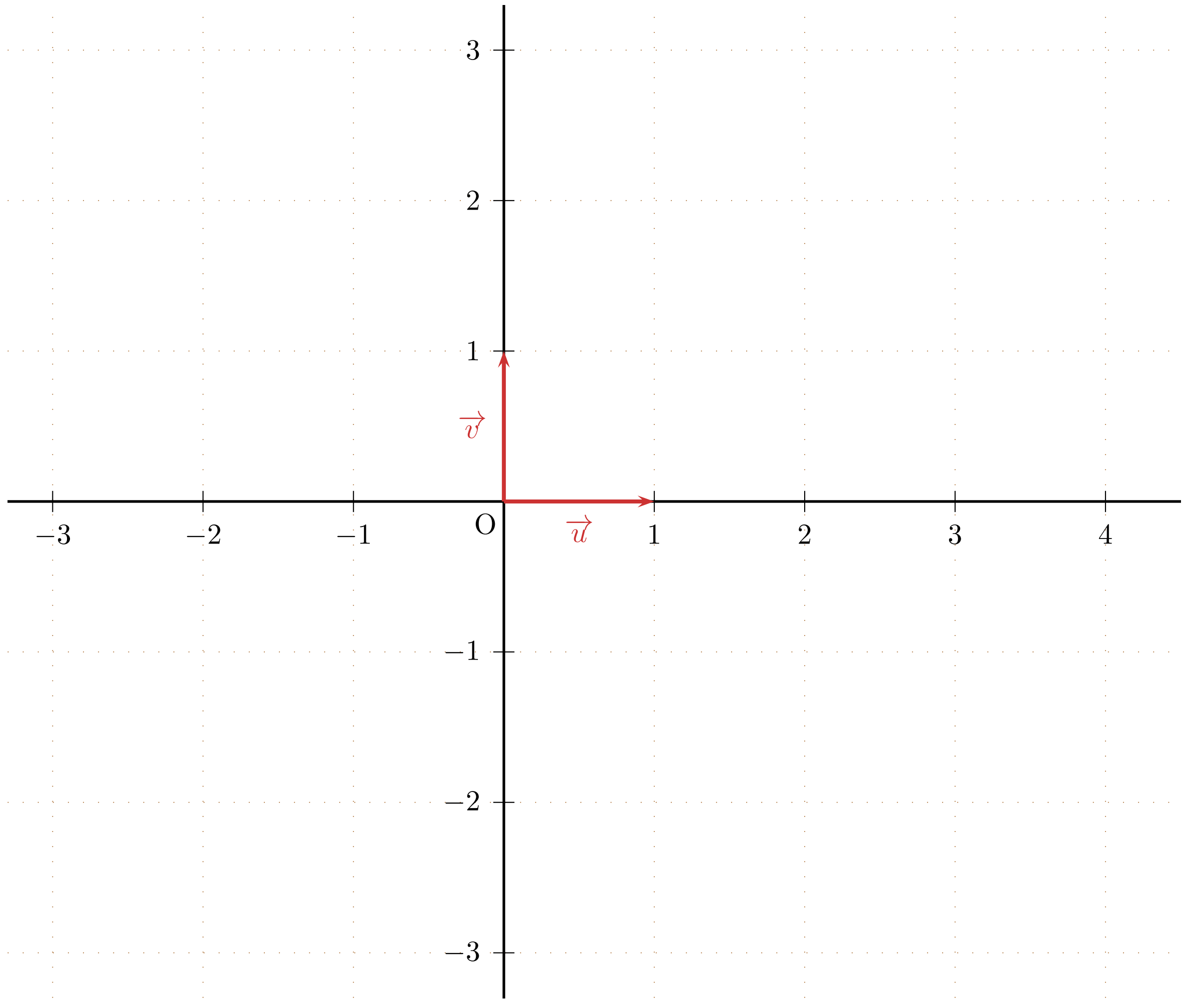
3. On suppose dans cette question qu'il existe un segment $[a\,;b]$ (avec $a < b$) stable par f, i.e. $f([a\,;b]) \subset [a\,;b]$.
   (a) Montrer que f admet au moins un point fixe.
   (b) On suppose f croissante. Montrer que $f(a) = a$ et $f(b) = b$.
   (c) En supposant toujours f croissante, montrer que la restriction de f au segment $[a\,;b]$ est la fonction identité.
   (d) Déterminer f dans le cas où f est décroissante.

4. Dans cette partie, on suppose que f est <u>croissante</u>, et toujours dilatante et continue sur $\mathbb{R}$.
   (a) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) < x$, alors $f(x) \underset{+\infty}{\sim} x$.
   (b) Montrer que si $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) > x$, alors $f(x) \underset{-\infty}{\sim} x$.
   (c) Montrer que si f n'a pas de point fixe, alors un des deux cas ci-dessus est vérifié.
   (d) Montrer que l'ensemble des points fixes de f est un intervalle de $\mathbb{R}$.

« Qu'est ce qu'un i qui court ?
Un complexe sportif. »

Nom: .... **Prénom:** ....

Exercice 2 :



Exercice 3 :