Analyse asymptotique - Suites - Complexes

Exercice 1 :

1. $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right]\right| = \dfrac{1}{2}\left\|\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & -2\end{vmatrix}\right\| = \dfrac{1}{2}\times|-6-16| = 11.$

   Commentaire: $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2}\times \mathrm{AB}\times\mathrm{AC}$ *si, et seulement si* ABC *est rectangle en* A *!*

2. Par définition, $\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \dfrac{1}{2}\times \mathrm{d}\,(\mathrm{A};\,(\mathrm{BC}))\times \mathrm{BC}$.

   Comme $\mathrm{BC} = \sqrt{(x_{\mathrm{C}}-x_{\mathrm{B}})^2+(y_{\mathrm{C}}-y_{\mathrm{B}})^2} = \sqrt{1+36} = \sqrt{37}$, alors

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{A};\,(\mathrm{BC})) = \frac{2\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}}}{\mathrm{BC}} = \frac{22\sqrt{37}}{37}.$$

3. $\mathrm{M}\,(x;\,y)$ du plan appartient à (AB) $\iff$ $\overrightarrow{\mathrm{AM}}\begin{pmatrix}x+1\\ y+1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\begin{pmatrix}3\\ 4\end{pmatrix}$ sont colinéaires

$$\iff \left[\overrightarrow{\mathrm{AM}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right] = 0 \iff \begin{vmatrix}x+1 & 3\\ y+1 & 4\end{vmatrix} = 0$$

$$\iff 4x-3y+1 = 0.$$

   Donc, $(\mathrm{AB}):\ 4x-3y+1=0$.

4. Il suffit de calculer la distance de $\mathrm{C}\,(3;\,-3)$ à la droite (AB) dont un vecteur normal est $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix}4\\ -3\end{pmatrix}$ donnée par la formule :

$$\mathrm{d}\,(\mathrm{C};\,(\mathrm{AB})) = \frac{|4x_{\mathrm{C}}-3y_{\mathrm{C}}+1|}{\|n\|} = \frac{22}{\sqrt{16+9}} = \frac{22}{5}.$$

   Comme $\mathrm{AB} = \sqrt{(x_{\mathrm{B}}-x_{\mathrm{A}})^2+(y_{\mathrm{B}}-y_{\mathrm{A}})^2} = \sqrt{9+16} = 5$, on retrouve :

$$\mathcal{A}_{\mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}\times \mathrm{d}\,(\mathrm{C};\,(\mathrm{AB}))\times\mathrm{AB} = \frac{1}{\cancel{2}}\times\frac{\cancel{2}\times 11}{\cancel{5}}\times\cancel{5} = 11.$$

Exercice 2 :

On s'intéresse dans cet exercice à l'application définie sur $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ par $f(z) = \dfrac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}$.

1.
   - $f(1) = -1$
   - $f(3\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$
   - $f(1-2\mathrm{i}) = 1-2\mathrm{i}$.

   $1-2\mathrm{i}$ est donc un point invariant de f.

   Commentaire: $\dfrac{1}{i} = -i$ *!*

2.
   - $f(z) = 0 \implies z = 2+\mathrm{i}$.
   - $f(z) = 1 \implies z-2-\mathrm{i} = z+\mathrm{i}$ qui n'a pas de solution.
   - $f(z) = \mathrm{i} \implies z-2-\mathrm{i} = \mathrm{i}z-1 \iff (1-\mathrm{i})z = 1+\mathrm{i}$ i est donc un point invariant de f.

$$\iff z = \frac{1+\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = \frac{(1+\mathrm{i})^2}{2} = \mathrm{i}.$$

3. Surtout pas de calculs compliqués pour cette question, il suffit de partir de l'expression de $f(z) = \mathrm{Z}$ et de calculer explicitement la réciproque :

$$\forall z\neq -\mathrm{i},\ \frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \mathrm{Z} \iff z-2-\mathrm{i} = z\mathrm{Z}+\mathrm{i}\mathrm{Z} \iff z(1-\mathrm{Z}) = 2+\mathrm{i}+\mathrm{i}\mathrm{Z}.$$

   Si $\mathrm{Z}\neq 1$ alors $z = \dfrac{2+\mathrm{i}+\mathrm{i}\mathrm{Z}}{1-\mathrm{Z}}$.

   L'application f est donc bien bijective de $\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$ vers $\mathbb{C}\setminus\{1\}$, et on a :

$$\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{1\},\ f^{-1}(z) = \frac{\mathrm{i}z+2+\mathrm{i}}{1-z}.$$

4. (a) $\mathbb{U} = \{z\in\mathbb{C}\ /\ |z| = 1\}$.

   (b) Posons $\delta = a+ib$ tel que $\delta^2 = -8-6\mathrm{i}$.

   Déterminons a et b en identifiant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{cases} a^2-b^2 = -8\\ 2ab = -6\\ a^2+b^2 = |\delta|^2 = \left|\delta^2\right| = 10\end{cases} \iff \begin{cases} a = \pm 1\\ b = \pm 3\end{cases}$$

   Comme $2ab<0$, les réels a et b sont de signe contraire.

   Les racines carrées de $-8-6\mathrm{i}$ sont donc $1-3\mathrm{i}$ et $-1+3\mathrm{i}$.

   (c) D'après le cours,

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\,\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{B}}}{z_{\mathrm{M}}-z_{\mathrm{A}}}\right) \equiv \arg\left(\frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right) \equiv \arg\left(f(z)\right)\ [2\pi].$$

   Commentaire: *N'oubliez pas le* arg *sinon ce n'est plus un angle ! ! ! Ni le* $[2\pi]$ *d'ailleurs.*

   (d) Il s'agit de résoudre l'équation $f(z) = z$ pour $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$:

$$f(z) = z \iff z-2-\mathrm{i} = z^2+\mathrm{i}z \iff z^2+(\mathrm{i}-1)z+2+\mathrm{i} = 0.$$

   Équation du second degré dont le discriminant est $\Delta = -8-6\mathrm{i} = (1-3\mathrm{i})^2$ d'après 3.(b).

   Les solutions sont donc $z_1 = \dfrac{1-\mathrm{i}+1-3\mathrm{i}}{2} = 1-2\mathrm{i}$ et $z_2 = \dfrac{1-\mathrm{i}-1+3\mathrm{i}}{2} = \mathrm{i}$.

   L'application f a donc deux points fixes z_1 et z_2.

   Commentaire: *Plus efficace, on pouvait utiliser intelligemment les résultats de 1. et 2. pour reconnaître les deux racines i et $1-2i$ de l'équation de degré 2 et écrire directement :* $z^2+(i-1)z+2+i = (z+i)(z-1+2i)$.

5. (a) D'après la question 3.(d), la transformation associée à f admet deux points invariants donc ce ne peut être une des 4 isométries qui ont exclusivement 0, 1 ou une infinité de points invariants.

   (b) Posons M le point d'affixe $z\in\mathbb{C}\setminus\{-\mathrm{i}\}$.

$$f(z)\in\mathbb{R} \iff \arg\left(f(z)\right)\in\mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)\in\mathbb{R} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\,\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)\equiv 0\ [\pi]$$

$$\iff \text{les points A, M et B sont alignés.}$$

$$\iff \mathrm{M}\in(\mathrm{AB}).$$

   L'ensemble cherché est donc la droite (AB) privé du point A.

   (c) De même que précédemment,

$$f(z)\in\mathrm{i}\mathbb{R} \iff \arg\left(f(z)\right)\in\mathrm{i}\mathbb{R} \iff \arg\left(\frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right)\in\mathrm{i}\mathbb{R} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AM}};\,\overrightarrow{\mathrm{BM}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}\ [\pi].$$

   L'ensemble cherché est donc le cercle de diamètre [AB] privé du point A.

(d) Encore,

$$f(z) \in \mathbb{U} \iff |f(z)| = 1 \iff \left|\frac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}\right| = 1 \iff |z-2-\mathrm{i}| = |z+\mathrm{i}| \iff \mathrm{BM} = \mathrm{AM}.$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [AB].

(e) D'après la question (3.), on a :

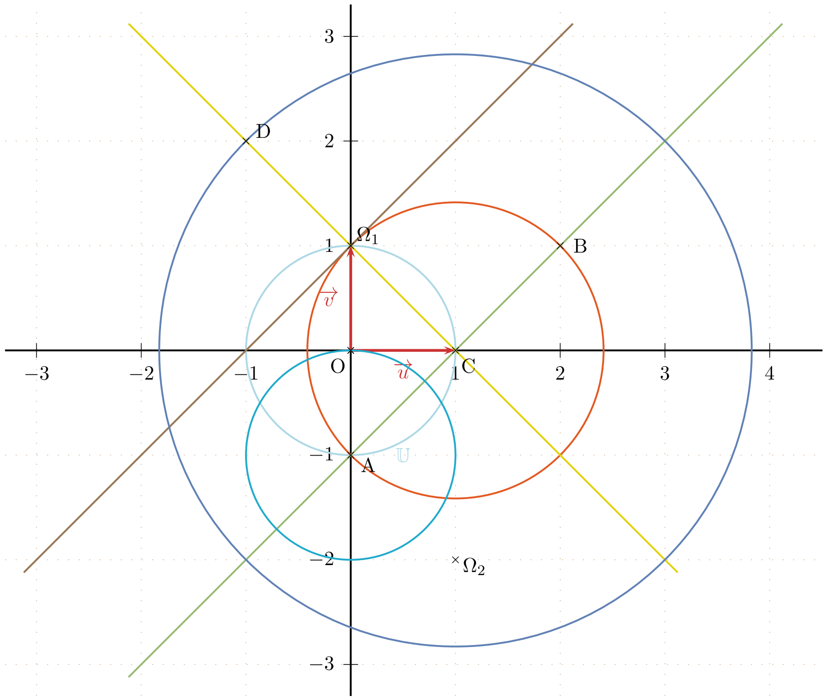
$$\begin{aligned} z \in \mathbb{U} &\iff |z| = 1 \iff \left|\frac{\mathrm{i}z+2+\mathrm{i}}{1-z}\right| = 1 \iff \left|\mathrm{i}\,\frac{z+1-2\mathrm{i}}{1-z}\right| = 1 \\ &\iff \left|\frac{z+1-2\mathrm{i}}{1-z}\right| = 1 \iff |z+1-2\mathrm{i}| = |z-1| \\ &\iff \mathrm{MD} = \mathrm{MC} \text{ où } \mathrm{D}(-1+2\mathrm{i}) \text{ et } \mathrm{C}(1). \end{aligned}$$

L'ensemble cherché est donc la médiatrice du segment [CD].

6. $f(z) - 1 = \dfrac{z-2-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} - 1 = \dfrac{-2-2\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}} = \dfrac{-2(1+\mathrm{i})}{z+\mathrm{i}}$.

$$\text{D'où, } z \in \mathscr{C}\Big(\mathrm{A}(-\mathrm{i}),\, 1\Big) \iff |z+\mathrm{i}| = 1 \implies |f(z)-1| = |-2(1+\mathrm{i})| = 2\sqrt{2}.$$

L'image par f du cercle de centre $\mathrm{A}(-\mathrm{i})$ et de rayon 1 est donc le cercle de centre $\mathrm{C}(1)$ et de rayon $2\sqrt{2}$.



Exercice 3 :

I. 1. (a) Par composée et somme de fonctions $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, f l'est également et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 1 - \frac{2x}{1+x^2} = \frac{(x-1)^2}{1+x^2} \geqslant 0.$$

On en déduit son tableau de variation sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f''(x)$		$+$	0	$-$			0	$+$	
$f'(x)$			$+$				0	$+$	
f	$-\infty$	↗			0	↗	$1-\ln 2$	↗	$+\infty$

(b) D'après l'étude des variations de f, celle-ci est continue et strictement croissante sur $[0\,;1]$ donc $f\big([0\,;1]\big) = [f(0)\,;f(1)] = [0\,;1-\ln 2] \subset [0\,;1]$.
L'intervalle $[0\,;1]$ est donc stable par f.

(c) f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, elle est au moins deux fois dérivable et on a :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ f''(x) = 2\frac{(x-1)(x+1)}{(1+x^2)^2}.$$

L'équation $f''(x) = 0$ a donc deux solutions $x = \pm 1$ qui correspondent aux points d'inflexion de la courbe $\mathscr{C}$.

2. En $-\infty$, d'après les théorèmes sur les composées et sommes de limites, on a immédiatement :

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Posons $h = \dfrac{1}{x}$, on a alors :

$$\begin{aligned} f\left(\frac{1}{h}\right) &= \frac{1}{h} - \ln\left(1+\frac{1}{h^2}\right) = \frac{1}{h} - \ln\left(\frac{1}{h^2}\left(1+h^2\right)\right) \\ &\underset{h\to0}{=} \frac{1}{h} + \underbrace{2\ln h - h^2 + \mathrm{o}\left(h^2\right)}_{\underset{h\to0}{=}\mathrm{o}\left(\frac{1}{h}\right)} \\ f(x) &\underset{x\to+\infty}{=} x + \mathrm{o}\left(x\right). \end{aligned}$$

Donc

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

3. (a) La fonction f est au moins de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, elle admet donc un développement limité à l'ordre 2 en 0. Le terme en x^2 dans le logarithme nous permet de développer $\ln(1+u)$ seulement à l'ordre 1 :

$$f(x) \underset{x\to0}{=} x - x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right). \tag{XVI.1}$$

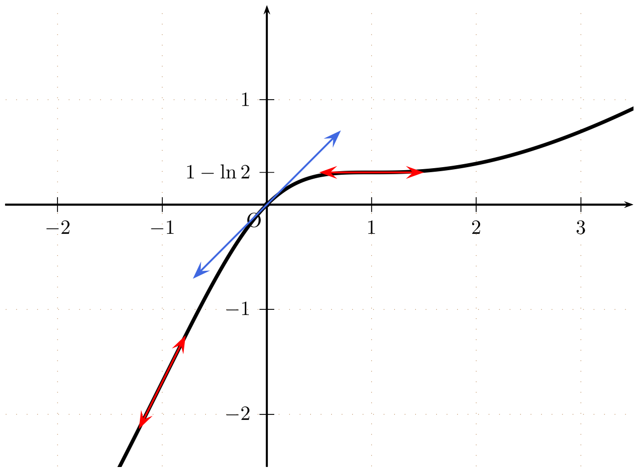
(b) Par le même raisonnement, f admet un DL à l'ordre 2 en 1.

Comme $f'(1) = f''(1) = 0$, il est plus rapide d'utiliser la formule de Taylor-Young que de poser $x = 1 + h$.

$$\begin{aligned} f(x) &\underset{x\to1}{=} f(1) + \cancel{f'(1)(x-1)} + \cancel{\frac{f''(1)}{2}(x-1)^2} + \mathrm{o}\left((x-1)^2\right) \\ &\underset{x\to1}{=} 1 - \ln 2 + \mathrm{o}\left((x-1)^2\right). \end{aligned}$$

(c) D'après (XVI.1), La courbe de f admet donc la droite d'équation $y = x$ comme tangente à l'origine et elle se situe au dessous d'après le signe du terme d'ordre 2 du DL.

4.



II. 6. Il suffit de calculer $u_{n+1} - u_n = -\ln(1 + u_n^2) \leqslant 0$.

Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

7. Il suffit de montrer qu'elle est minorée.

D'après (b), l'intervalle $[0\,;1]$ est stable par f. Il est facile de montrer que $u_n \in [0\,;1]$, pour tout entier n.

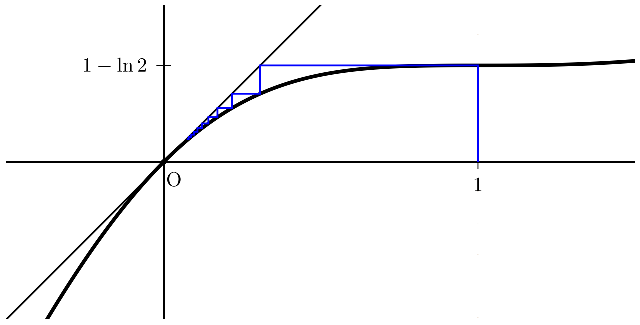
En particulier, elle est minorée par 0 donc converge d'après le théorème de convergence monotone.

La fonction f étant continue, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge donc vers un de ses points fixes *i.e.* les solutions de l'équation

$$f(x) = x \iff \ln(1 + x^2) = 0 \iff x = 0.$$

En conclusion, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

8.



9. (a) *Cf cours...*

(b) Soit $h \in]0\,;1]$. La fonction $t \longmapsto \ln(1+t)$ est continue sur $[0\,;h]$ et dérivable sur $]0\,;h[$ de dérivée la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{1+t}$ donc il existe $c_h \in]0\,;h[$ tel que :

$$\frac{\ln(1+h)}{h} = \frac{1}{1+c_h}.$$

10. (a) Comme $x \in [0\,;1]$ alors $x^2 \in [0\,;1]$. D'après la question précédente on a donc :

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x^2} = \frac{1}{1+c_{x^2}}.$$

Or, $\forall\, c_{x^2} \in [0\,;1]$, $\dfrac{1}{1+c_{x^2}} \geqslant \dfrac{1}{2}$.

D'où , $$\begin{aligned} \frac{\ln(1+x^2)}{x^2} \geqslant \frac{1}{2} &\iff -\ln(1+x^2) \leqslant -\frac{1}{2}x^2 \\ &\iff x - \ln(1+x^2) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2 \\ &\iff f(x) \leqslant x - \frac{1}{2}x^2. \end{aligned}$$

(b) D'après la question (7.), on sait que $u_n \in [0\,;1]$ donc on peut appliquer le résultat précédent à u_n pour tout entier n :

$$f(u_n) \leqslant u_n - \frac{1}{2}u_n^2 \iff u_{n+1} - u_n \leqslant -\frac{1}{2}u_n^2 \iff u_n^2 \leqslant 2(u_n - u_{n+1}).$$

(c) Comme somme de termes positifs, la suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est clairement croissante.

De plus, d'après la question précédente,

$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 \leqslant 2\sum_{k=0}^{n}(u_k - u_{k+1}) = 2(u_0 - u_{n+1}) = 2 - 2u_{n+1} \leqslant 2,$$

la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant à termes toujours positifs.

La suite $\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc croissante et majorée donc converge d'après le théorème de convergence monotone.

En conclusion, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=0}^{n} u_k^2$ existe. [1]

[1]. De là à savoir combien elle vaut, c'est un autre pas et surement un autre devoir.

Exercice 4 :

1 ① $f : x \mapsto ax + b$ est dilatante si, et seulement si $|a| \geqslant 1$.

② Considérons f définie par $f(x) = x - 2$ si $x < 0$, $f(x) = 1 - x$ si $0 \leqslant x \leqslant 1$, et $f(x) = x + 3$ si $x > 1$.
f est dilatante et non monotone.

2 ① Soient $x, y \in \mathbb{R}$ tels que $f(x) = f(y)$. f étant dilatante, on a $|x - y| \leqslant |f(x) - f(y)| = 0$ d'où $x = y$.
Une fonction dilatante est injective.

② D'après le cours, une fonction **injective** et **continue** est strictement monotone.
Donc f est strictement monotone.

③ Supposons alors f strictement croissante, et montrons que $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est surjective.
f étant dilatante, on a $\forall x \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(0)| \geqslant |x|$.

— Comme $\forall x > 0$, alors $f(x) > f(0)$. On en déduit que $\forall x > 0$, $f(x) - f(0) \geqslant x$ et donc que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

— Comme $\forall x < 0$, alors $f(x) < f(0)$ et $\forall x < 0$, $f(0) - f(x) \geqslant -x$. Donc $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

La fonction f étant continue sur $\mathbb{R}$ et d'après les deux limites précédentes, on déduit que tout réel admet un antécédent par f d'après le théorème des valeurs intermédiaires. f est donc surjective.
Même raisonnement si f est supposée strictement décroissante.
Dans tous les cas, une $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue et dilatante est bijective.

3 On suppose dans cette question qu'il existe un segment $[a\,;b]$ (avec $a < b$) stable par f, i.e. $f([a\,;b]) \subset [a\,;b]$.

① Considérons ϕ définie sur $[a\,;b]$ par $\phi(x) = f(x) - x$.

— ϕ est continue sur $[a\,;b]$ comme somme de fonctions continues.

— $\phi(a) = f(a) - a \geqslant 0$ puisque $f(a) \in\subset [a\,;b]$.

— $\phi(b) = f(b) - b \leqslant 0$ puisque $f(b) \in\subset [a\,;b]$.

D'après le TVI, on conclut que ϕ s'annule sur $[a\,;b]$, *i.e.* f admet un point fixe sur $[a\,;b]$.

② On suppose f croissante.
Supposons qu'on ait $f(a) > a$ ou $f(b) < b$. On aurait $f(b) - f(a) < b - a$ et donc $|f(b) - f(a)| < |b - a|$. f étant dilatante, c'est absurde.
Par conséquent, $f(a) \leqslant a$ et $f(b) \geqslant b$.
Mais par hypothèse, $f([a\,;b]) \subset [a\,;b]$ d'où $f(a) = a$ et $f(b) = b$.

③ Soit $x \in]a, b[$.

— Supposons que $f(x) > x$. Alors, $f(b) - f(x) = b - f(x) < b - x$.
f étant croissante, on en déduit $|f(b) - f(x)| < |b - x|$. C'est absurde, puisque f est dilatante.

— Supposons que $f(x) < x$. Alors, $f(x) - f(a) = f(x) - a < x - a$.
f étant croissante, on en déduit $|f(x) - f(a)| < |x - a|$. C'est absurde, puisque f est dilatante.

Par conséquent $f(x) = x$ et donc $f|_{[a;b]} = \mathrm{Id}_{[a;b]}$.

④ Dans le cas où f est décroissante, considérons $\psi : x \mapsto a + b - x$.
On prouve sans difficulté que $g = \psi \circ f$ est dilatante, continue, croissante, et vérifie $g([a\,;b]) \subset [a\,;b]$.
Par conséquent, $g|_{[a;b]} = \mathrm{Id}_{[a;b]}$ et $\forall x \in [a\,;b]\,, a + b - f(x) = x$.
Finalement, $\forall x \in [a\,;b]\,, f(x) = a + b - x$.

4 Dans cette partie, on suppose que f est croissante, et toujours dilatante et continue sur $\mathbb{R}$.

① Soit $x > 0$. Comme f est croissante, on a $f(x) - f(0) > 0$.
f étant dilatante, on a $f(x) - f(0) = |f(x) - f(0)| \geqslant |x - 0| = x$ d'où $f(x) \geqslant x + f(0)$
D'autre part, on a supposé $f(x) < x$, d'où $x + f(0) \leqslant f(x) < x$ et enfin $1 + \dfrac{f(0)}{x} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} < 1$.
Par encadrement on déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = 1$ ou encore

$$f(x) \underset{+\infty}{\sim} x.$$

② De même, pour $x < 0$, on a $f(0) - f(x) \geqslant 0 - x$ donc $x + f(0) \geqslant f(x) > x$ par hypothèse.
On a donc $1 + \dfrac{f(0)}{x} \leqslant \dfrac{f(x)}{x} < 1$ (en divisant par x strictement négatif) et

$$f(x) \underset{-\infty}{\sim} x.$$

③ Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(x_0) \leqslant x_0$ et x_1 tel que $f(x_1) \geqslant x_1$.
Alors la fonction $\phi : x \mapsto f(x) - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ et vérifie $\phi(x_0) \leqslant 0$ et $\phi(x_1) \geqslant 0$.
D'après le TVI, ϕ s'annule entre x_0 et x_1.
Posons $\phi(x_3) = 0$.
On a $f(x_3) = x_3$ et donc f admet un point fixe.
On a prouvé : $[(\exists x_0 \in \mathbb{R}, f(x_0) \leqslant x_0)$ et $(\exists x_1 \in \mathbb{R}, f(x_1) \geqslant x_1)] \implies f$ admet un point fixe.
Par contraposition :

$$f \text{ n'admet pas de point fixe} \implies [(\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > x) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R}, f(x) < x)]\,.$$

④ Posons F l'ensemble des points fixes de f.

— Il est envisageable que f n'ait pas de points fixes. Alors $\mathrm{E} = \varnothing$ qui est un intervalle particulier.

— f peut également avoir un seul point fixe x_0. $\mathrm{E} = \{x_0\}$ est encore un intervalle.

— Supposons que f admette deux points fixes a et b ($a < b$).
Alors f étant supposée croissante, on a $\forall x \in [a\,;b]\,, a = f(a) \leqslant f(x) \leqslant f(b) = b$ donc $[a\,;b]$ est stable par f.
D'après la question **3**.③, la fonction étant bien dilatante, continue et croissante, on a $f|_{[a;b]} = \mathrm{Id}_{[a;b]}$.
C'est à dire que tous les points de $[a\,;b]$ sont encore des points fixes de f : $[a\,;b] \subset \mathrm{F}$.
C'est la définition d'un intervalle.

L'ensemble des points fixes de f est un intervalle de $\mathbb{R}$.