Nombres Complexes II

Exercice 1 :

1 Soit $z \in \mathbb{C}$.

$z \in D_f \iff z - 2i \neq 0 \iff z \neq 2i$

L'ensemble de définition de ϕ est $D_f = \mathbb{C} \setminus \{2i\}$.

2 ① Posons $z = x + iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z^2 = 8 - 6i &\iff x^2 - y^2 + 2ixy = 8 - 6i \\
&\iff \begin{cases} x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \quad \text{car } x, y \in \mathbb{R} \\
&\iff \begin{cases} x^2 + y^2 = 10 \text{ car } x^2 + y^2 = |z|^2 = |z^2| = |8 - 6i| = 10 \\ x^2 - y^2 = 8 \\ 2xy = -6 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = 9 \\ y^2 = 1 \\ xy = -3 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3 \text{ ou } x = -3 \\ y = 1 \text{ ou } y = -1 \\ xy = -3 \end{cases}
\end{aligned}$$

Les racines carrées de $8 - 6i$ sont $3 - i$ et $-3 + i$.

② Déterminons les antécédents de $1 + i$:

$$\begin{aligned}
\forall z \in D, \quad \phi(z) = 1 + i &\iff \frac{z^2}{z - 2i} = 1 + i \\
&\iff z^2 = (1 + i)(z - 2i) \text{ car } z \neq 2i \\
&\iff z^2 - (1 + i)z + (-2 + 2i) = 0 \quad (E_1)
\end{aligned}$$

(E_1) est une équation du second degré de discriminant : $\Delta_1 = 8 - 6i = (3 - i)^2$.

(E_1) admet deux solutions distinctes : $\dfrac{(1 + i) - (3 - i)}{2} = -1 + i$ et $\dfrac{(1 + i) + (3 - i)}{2} = 2$.

Par conséquent, $1 + i$ admet deux antécédents par ϕ : $-1 + i$ et 2.

3 ① Soit $b \in \mathbb{C}$. Déterminons les antécédents de b par ϕ :

$$\begin{aligned}
\forall z \in D, \quad \phi(z) = b &\iff \frac{z^2}{z - 2i} = b \\
&\iff z^2 = b(z - 2i) \text{ car } z \neq 2i \\
&\iff z^2 - bz + 2ib = 0 \quad (E_2)
\end{aligned}$$

(E_2) est une équation du second degré de discriminant : $\Delta_2 = b^2 - 4(2ib) = b(b - 8i)$.

- Si $b \in \{0, 8i\}$, $\Delta_2 = 0$, donc d admet un seul antécédent par ϕ.
- Si $b \in \mathbb{C} \setminus \{0, 8i\}$, $\Delta_2 \neq 0$, donc d admet deux antécédents distincts par ϕ.

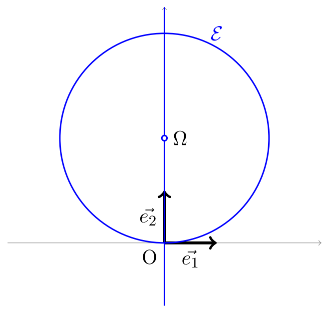
② Soit $z = x + iy \in D$ avec $x, y \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
\phi(z) = \frac{z^2}{z - 2i} = \frac{(x + iy)^2}{x + i(y - 2)} &= \frac{[(x^2 - y^2) + 2ixy][x - i(y - 2)]}{[x + i(y - 2)][x - i(y - 2)]} \\
&= \frac{[(x^2 - y^2)x + 2xy(y - 2)] + i[2x^2y - (x^2 - y^2)(y - 2)]}{x^2 + (y - 2)^2} \\
&= \frac{[(x^2 + y^2 - 4y)x] + i[2x^2y - (x^2 - y^2)(y - 2)]}{x^2 + (y - 2)^2}
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
M(z) \in \mathcal{E} &\iff \phi(z) \in i\mathbb{R} \\
&\iff \text{Re}\,(\phi(z)) = 0 \\
&\iff \frac{(x^2 + y^2 - 4y)x}{x^2 + (y - 2)^2} = 0 \\
&\iff (x^2 + y^2 - 4y)x = 0 \text{ et } x^2 + (y - 2)^2 \neq 0 \\
&\iff \left[x^2 + y^2 - 4y = 0 \text{ ou } x = 0\right] \text{ et } (x, y) \neq (0, 2) \\
&\iff \left[x^2 + (y - 2)^2 = 2^2 \text{ ou } x = 0\right] \text{ et } (x, y) \neq (0, 2)
\end{aligned}$$

Ainsi $\mathcal{E} = (\mathcal{C} \cup (Oy)) \setminus \{\Omega\}$, où $\mathcal{C}$ est le cercle de centre $\Omega(2i)$ et de rayon 2.



Exercice 2 :

1 Recherche des points invariants :

$$\begin{aligned}
M(z) \text{ est invariant par } f &\iff f(M) = M \\
&\iff z' = z \iff \frac{2iz - 5}{z - 2i} = z \iff 2iz - 5 = z(z - 2i) \\
&\iff z^2 - 4iz + 5 = 0 \text{ car } z \neq 2i
\end{aligned}$$

$\Delta = -36 = (6i)^2$. Les solutions sont $5i$ et $-i$.

Donc, f a deux points invariants : $B(5i)$ et $C(-i)$.

2 Soit $M_1 \in \mathcal{P} \setminus \{A\}$ et z_1 son affixe ($z_1 \neq 2i$).

$$\begin{aligned}
M_0(z_0) \text{ est un antécédent de } M_1 \text{ par } f &\iff z_1 = \frac{2iz_0 - 5}{z_0 - 2i} \\
&\iff (z_0 - 2i)z_1 = 2iz_0 - 5 \text{ car } z_0 \neq 2i \\
&\iff z_0(z_1 - 2i) = 2iz_1 - 5 \\
&\iff z_0 = \frac{2iz_1 - 5}{z_1 - 2i} \text{ car } z_1 \neq 2i
\end{aligned}$$

Donc M_1 a un et un seul antécédent par f : le point M_0 d'affixe $\dfrac{2iz_1 - 5}{z_1 - 2i}$.

Donc, f est une bijection sur $\mathcal{P} \setminus \{A\}$.

3 On vient de voir que $f^{-1} : M_1 \mapsto M_0$ est définie par $z_0 = \dfrac{2iz_1 - 5}{z_1 - 2i}$.

On remarque que $f^{-1} = f$ et on dit que f est involutive.

4 Soit $M(z) \in \mathcal{D}$, alors $z = iy$ avec $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$;

Ainsi, $z' = \dfrac{2i(iy) - 5}{iy - 2i} = \dfrac{-2y - 5}{i(y-2)} = \dfrac{2y+5}{y-2} i \in i\mathbb{R}$.

On remarque que $\dfrac{2y+5}{y-2} i = \dfrac{2(y-2)+9}{y-2} i = \left(2 + \dfrac{9}{y-2}\right) i \neq 2i$.

On a bien $M' \in \mathcal{D}$ *i.e.* $f(\mathcal{D}) \subset \mathcal{D}$: $\mathcal{D}$ est globalement invariant par f.

5 ① Si $z \neq 2i$, alors : $z' - 2i = \dfrac{2iz - 5}{z - 2i} - 2i = \dfrac{2iz - 5 - 2i(z - 2i)}{z - 2i} = \dfrac{-9}{z - 2i}$.

Par conséquent, $(z' - 2i)(z - 2i) = -9$, et en passant aux modules, $|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9$.

② Soit $M(z)$ sur le cercle Γ de centre A et de rayon $r > 0$. Alors $AM = |z - 2i| = r$. On a vu que $|z' - 2i| \times |z - 2i| = 9$, d'où $AM' = |z' - 2i| = \dfrac{9}{|z - 2i|} = \dfrac{9}{r}$.

En notant Γ' le cercle de centre A et de rayon $\dfrac{9}{r}$, on a prouvé que $f(\Gamma) \subset \Gamma'$.

Réciproquement, soit un point M_1 du cercle $\mathcal{C}(A, \dfrac{9}{r})$. Par le même raisonnement, on peut prouver que son image M_1' par f est sur le cercle $\mathcal{C}(A, \dfrac{9}{9/r})$, c'est-à-dire sur Γ. Or f étant involutive, on a aussi $f(M_1') = M_1$.

Tous les points de Γ' ont par conséquent un antécédent sur Γ. Cela prouve que $\Gamma' \subset f(\Gamma)$.

Ainsi $f(\Gamma) = \Gamma'$.

③ Γ est globalement invariant par $f \iff f(\Gamma) = \Gamma \iff \dfrac{9}{r} = r \iff r = 3$ (car $r > 0$).

Le cercle de centre A et de rayon 3 est globalement invariant par f.

On peut remarquer qu'il contient les points B et C.