Matrices

Exercice 1 : On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 5 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}
2. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
3. Montrer que $A^n = PD^nP^{-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_{n+1} = -u_n + 2v_n \\ v_{n+1} = -4u_n + 5v_n \end{cases}$$

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.
(2) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n et v_n en fonction de u_0 et v_0 et de n.
(3) Étudier le comportement de ces deux suites.

5. On considère deux fonction x et y définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs réelles et dérivables sur $\mathbb{R}$.
On suppose que x et y vérifient le système différentiel suivant :

$$\begin{cases} x' = -x + 2y \\ y' = -4x + 5y \end{cases}$$

On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $X' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ *i.e.* $\forall\, t \in \mathbb{R}$, $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ et $X'(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

On définit deux fonctions $x_1, y_1 : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R}$ par $X_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$ et $X_1 = P^{-1}X$ et on pose $X_1' = \begin{pmatrix} x_1' \\ y_1' \end{pmatrix}$.

(1) Montrer que $X_1' = DX_1$.
(2) En déduire deux équations différentielles vérifiées par x_1 et y_1.
(3) Déterminer les fonctions x_1 et y_1, et en déduire les solutions x et y du système de départ.

Exercice 2 : Soit a un réel donné. On pose $A_n = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{a}{n} \\ \frac{a}{n} & 1 \end{pmatrix}$.

L'objectif de cet exercice est de calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.[1]

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

(1) Montrer qu'il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi\,;\pi[$ tel que :

$$\cos\theta_n = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}} \quad \text{et} \quad \sin\theta_n = \frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1+\frac{a^2}{n^2}}}.$$

(2) En déduire que :

$$\forall\, n \in \mathbb{N}^*,\ A_n^n = \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(n\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

2. (1) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}}$.

(2) Montrer que $n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\sin\theta_n$ et en déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} n\theta_n$.

3. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} A_n^n$.

[1]. Qui n'est pas I !