Révisions

❑ Exercice 1 : $\mathcal{D} : \begin{cases} x+y+z=1 \\ x-y+z=-1 \end{cases}$ et $\mathrm{A}(1,1,1)$. Calculer $d(\mathrm{A},\mathcal{D})$.

❑ Exercice 2 : L'espace est rapporté à un repère orthonormé.

Soit $\mathrm{A}(1,0,-2)$ et $\mathcal{P} \begin{cases} x=1+\lambda+\mu \\ y=-1+\lambda-\mu \\ z=1+2\lambda+3\mu \end{cases}$, $(\lambda;\ \mu)\in\mathbb{R}^2$. Calculer $d(\mathrm{A},\mathcal{P})$.

❑ Exercice 3 : Soient $\mathrm{A}(1,2,3)$, $\mathrm{B}(3,-1,-1)$, $\mathrm{C}(2,0,1)$ et $\mathrm{D}(1,1,2)$. Déterminer le volume du tétraèdre ABCD.

❑ Exercice 4 : Factoriser dans $\mathrm{X}^6+2\mathrm{X}^4+2\mathrm{X}^2+1$ dans $\mathbb{R}$.

❑ Exercice 5 : On considère le polynôme $\mathrm{P}=\mathrm{X}^5+\mathrm{X}^4+2\mathrm{X}^3+\mathrm{X}^2+\mathrm{X}$.

1. Vérifier que P admet une racine imaginaire pure.
2. Factoriser P dans $\mathbb{C}[\mathrm{X}]$ puis dans $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

❑ Exercice 6 : Soit $u_0>0$ et $u_{n+1}=\dfrac{1+u_n}{1+2u_n}$.
Justifier l'existence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrer que (u_{2n}) et (u_{2n+1}) sont monotones.
Qu'en déduire pour l'étude de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

❑ Exercice 7 : Soient $u_0, v_0\in\mathbb{R}_+^*$, et $\forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1}=\dfrac{u_n+v_n}{2}$ et $v_{n+1}=\dfrac{2u_nv_n}{u_n+v_n}$.
Montrer que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite qu'on déterminera.
Indication : commencer par montrer que $\forall n\in\mathbb{N}^*, u_n\geqslant v_n$.

❑ Exercice 8 : Résoudre et discuter le système suivant d'inconnue (x,y,z) et de paramètre a : $\begin{cases} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=1 \\ x+y+az=1 \end{cases}$

❑ Exercice 9 : Déterminer l'inverse de $\mathrm{A}=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

❑ Exercice 10 : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que les points d'affixes j, z, jz soient alignés.

❑ Exercice 11 : Résoudre dans $\mathbb{C}$: $(z^2-1)^3=-8z^3$.

❑ Exercice 12 : Soit $f(x)=(\cos x)^{\frac{1}{x}}$ pour $x\in\left]-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right[\setminus\{0\}$.

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0.
2. Déterminer un DL de f en 0 à l'ordre 2.
3. Étudier la dérivabilité du prolongement de f.

❑ Exercice 13 : Étudier l'asymptote oblique de la courbe de $f : x\mapsto\sqrt[3]{x^2(x-2)}$.
Préciser les positions relatives de la courbe avec cette asymptote.

❑ Exercice 14 : Montrer que : $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^n=\mathrm{o}\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.