Matrices

Exercice 1 :

1 La matrice P est une matrice 2×2 de déterminant $\det \mathrm{P} = 1 \neq 0$. Elle est donc inversible et on a :

$$\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2 Il suffit de faire le produit…

3 Par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$:

— La relation est vraie à l'ordre 1 car $\mathrm{A}^0 = \mathrm{I}_2$ et $\mathrm{PD}^0\mathrm{P}^{-1} = \mathrm{PP}^{-1} = \mathrm{I}$.

— $\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{A}^n \times \mathrm{A} = \mathrm{A}^n \times \mathrm{PDP}^{-1}$.
Si l'hypothèse de récurrence est vraie à l'ordre n alors

$$\mathrm{A}^{n+1} = \mathrm{PD}^n(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{P})\mathrm{DP}^{-1} = \mathrm{PD}^{n+1}\mathrm{P}^{-1}.$$

La relation est héréditaire.

Étant initialisée et héréditaire, la relation $\mathrm{A}^n = \mathrm{PD}^n\mathrm{P}^{-1}$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4 ① Il suffit d'écrire…

② Une récurrence aisée montre que $\forall\, n \in \mathbb{N},\ \mathrm{X}_n = \mathrm{A}^n\mathrm{X}_0$.

Or, $\mathrm{A}^n = \mathrm{P}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}\mathrm{P}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 - 3^n & -1 + 3^n \\ 2 - 2 \times 3^n & -1 + 2 \times 3^n \end{pmatrix}$.

Donc $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_n = (2 - 3^n)u_0 + (-1 + 3^n)v_0 \\ v_n = (2 - 2 \times 3^n)u_0 + (-1 + 2 \times 3^n)v_0 \end{cases}$ ou encore :

$$u_n = 2u_0 - v_0 + 3^n(v_0 - u_0) \quad \text{et} \quad v_n = 2u_0 - v_0 + 2 \times 3^n(v_0 - u_0).$$

③ On a trois cas possibles :

— si $u_0 = v_0$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont constantes à $2u_0 - v_0$.

— si $u_0 < v_0$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $+\infty$.

— si $u_0 > v_0$, les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent vers $-\infty$.

5 ① D'après l'énoncé on a $\mathrm{X} = \mathrm{PX}_1 \iff \begin{cases} x = x_1 + y_1 \\ y = x_1 + 2y_1 \end{cases}$

En dérivant les deux équations, on obtient alors

$$\begin{cases} x' = x_1' + y_1' \\ y' = x_1' + 2y_1' \end{cases} \iff \mathrm{X}' = \mathrm{PX}_1' \iff \mathrm{X}_1' = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{X}'.$$

Or, $\mathrm{X}' = \mathrm{AX} = \mathrm{APX}_1$.
D'où $\mathrm{X}_1' = \mathrm{P}^{-1}(\mathrm{APX}_1) = \underbrace{(\mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP})}_{=\mathrm{D}}\mathrm{X}_1 = \mathrm{DX}_1$.

② Il suffit de traduire le produit matriciel précédent :

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ y_1' = 3y_1 \end{cases}$$

③ Il suffit de résoudre les deux équations différentielles linéaires à coefficients constants précédentes :

$$\forall\, t \in \mathbb{R},\ x_1(t) = \lambda e^t \quad \text{et} \quad y_1(t) = \mu e^{3t},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

On revient maintenant au système initial grâce à la matrice de passage P et la relation :

$$\mathrm{X} = \mathrm{PX}_1 \iff \begin{cases} x(t) = x_1(t) + y_1(t) \\ y(t) = x_1(t) + 2y_1(t) \end{cases} \iff \begin{cases} x(t) = \lambda e^t + \mu e^{3t} \\ y(t) = \lambda e^t + 2\mu e^{3t} \end{cases}$$

Remarque : C'est un procédé standard de tenter de diagonaliser la matrice définissant le système différentiel linéaire.

Exercice 2 :

1 ① Puisque $\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 + \left(\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}\right)^2 = 1$, le nombre complexe $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} + \mathrm{i}\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ est élément du cercle unité $\mathbb{S}^1$.

La fonction $t \longmapsto e^{\mathrm{i}t}$ étant une bijection de $[-\pi\,;\pi[$ sur $\mathbb{S}^1$, il existe un unique $\theta_n \in [-\pi\,;\pi[$ tel que $e^{\mathrm{i}\theta_n} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} + \mathrm{i}\dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ *i.e.* il existe un unique réel $\theta_n \in [-\pi, \pi[$ tel que : $\cos\theta_n = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$ et $\sin\theta_n = \dfrac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}$.

② La matrice A_n s'écrit alors $\mathrm{A}_n = \sqrt{1 + \dfrac{a^2}{n^2}}\begin{pmatrix} \cos\theta_n & -\sin\theta_n \\ \sin\theta_n & \cos\theta_n \end{pmatrix}$ et donc :

$$(\mathrm{A}_n)^n = \left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{n/2}\begin{pmatrix} \cos(n\theta_n) & -\sin(n\theta_n) \\ \sin(\theta_n) & \cos(n\theta_n) \end{pmatrix}.$$

2 ① Comme $\dfrac{a}{n} \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, on a : $\left(1 + \dfrac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = \exp\left(\dfrac{n}{2}\ln\left(1 + \dfrac{a^2}{n^2}\right)\right)$

$$\underset{n\to+\infty}{=} \exp\left(\frac{n}{2} \times \mathrm{o}\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

Donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(1 + \frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$.

② En notant alors ε le signe de a, $\theta_n = \varepsilon\arccos\left(\dfrac{1}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}\right) \underset{n\to+\infty}{\to} 0$ *i.e.* $\theta_n \underset{n\to+\infty}{=} \mathrm{o}(1)$, ce qui permet d'écrire :

$$n\sin(\theta_n) \underset{n\to+\infty}{\sim} n\theta_n \implies n\theta_n \underset{n\to+\infty}{\sim} n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}}.$$

D'après les théorèmes sur les sommes et composées de limites, on a facilement $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}} = 1$.
Donc, d'après les théorème sur les produits de limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} n\theta_n = \lim_{n\to+\infty} n\frac{\frac{a}{n}}{\sqrt{1 + \frac{a^2}{n^2}}} = \lim_{n\to+\infty} n \times \frac{a}{n} = a.$$

3 Tout a déjà été fait dans les question précédentes :

— $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{a^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$.

— $\lim_{n\to+\infty} n\theta_n = a$.

On en déduit que $\lim_{n\to+\infty} (\mathrm{A}_n)^n = \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$. ⌊2⌋

⌊2⌋. Pour être vraiment rigoureux, il faudrait expliciter sous quelle norme on entend la convergence de la matrice A_n^n. Nous remettons cela à plus tard en admettant que la norme choisie entraine qu'une matrice $\mathrm{A}_n = \left(a_{n\,ij}\right)$ converge vers une matrice $\mathrm{A} = (a_{ij})$ si, et seulement si $\forall\, i,\, j,\ \lim_{n\to+\infty} a_{n\,ij} = a_{ij}$.