Polynômes

1. (a) On a $\begin{cases} a_0 = 1 \\ \dfrac{a_0}{2!} + \dfrac{a_1}{1!} = 0 \\ \dfrac{a_0}{3!} + \dfrac{a_1}{2!} + \dfrac{a_2}{1!} = 0 \\ \dfrac{a_0}{4!} + \dfrac{a_1}{3!} + \dfrac{a_2}{2!} + \dfrac{a_3}{1!} = 0 \\ \dfrac{a_0}{5!} + \dfrac{a_1}{4!} + \dfrac{a_2}{3!} + \dfrac{a_3}{2!} + \dfrac{a_4}{1!} = 0 \end{cases}$ Donc, $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = -\dfrac{1}{2} \\ a_2 = -\dfrac{1}{3!} + \dfrac{\frac{1}{2}}{2!} = \dfrac{1}{12} \\ a_3 = -\dfrac{1}{4!} + \dfrac{\frac{1}{2}}{3!} - \dfrac{\frac{1}{12}}{2!} = 0 \\ a_4 = -\dfrac{1}{5!} + \dfrac{\frac{1}{2}}{4!} - \dfrac{\frac{1}{12}}{3!} - \dfrac{0}{2!} = -\dfrac{1}{720} \end{cases}$

   (b) $$\begin{aligned} A_0 &= a_0 &&= 1 \\ A_1 &= a_0\frac{X}{1!} + a_1 &&= X - \frac{1}{2} \\ A_2 &= a_0\frac{X^2}{2!} + a_1\frac{X}{1!} + a_2 &&= \frac{X^2}{2} - \frac{X}{2} + \frac{1}{12} \\ A_3 &= a_0\frac{X^3}{3!} + a_1\frac{X^2}{2!} + a_2\frac{X}{1!} + a_3 &&= \frac{X^3}{6} - \frac{X^2}{4} + \frac{X}{12} \\ A_4 &= a_0\frac{X^4}{4!} + a_1\frac{X^3}{3!} + a_2\frac{X^2}{2!} + a_3\frac{X}{1!} + a_4 &&= \frac{X^4}{24} - \frac{X^3}{12} + \frac{X^2}{24} - \frac{1}{720} \end{aligned}$$

2. Tout d'abord, la suite (A_n) vérifie bien ces propriétés :
   (a) $A_0 = 1$;
   (b) pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $$A'_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{(n-k)X^{n-k-1}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{(n-k)X^{n-k-1}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{X^{n-k-1}}{(n-1-k)!} = A_{n-1}.$$
   (c) Soit $n \geqslant 2$.
   $$A_n(0) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{0}{(n-k)!} + a_n = a_n\ ;$$
   $$A_n(1) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{1}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{(n-k)!} + a_n.$$
   Or, par définition de la suite (a_n), on a $\forall n \geqslant 2$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{a_k}{(n-k)!} = 0$, d'où $A_n(1) = a_n = A_n(0)$.

   Supposons maintenant qu'une suite (P_n) vérifie ces mêmes conditions et montrons que $\forall n \in \mathbb{N}$, $P_n = A_n$.
   — D'après la condition a., on a $P_0 = 1$ et $A_0 = 1$. On a bien $P_0 = A_0$.
   — Supposons que $P_n = A_n$ avec $n \geqslant 0$. En appliquant la propriété b. à $n+1 \geqslant 1$, on a alors $P'_{n+1} = P_n = A_n = A'_{n+1}$; on en déduit $P_{n+1} = A_{n+1} + k$.
   On en déduit alors $P'_{n+2} = P_{n+1} = A_{n+1} + k = A'_{n+1} + k$; et donc $P_{n+2} = A_{n+1} + kX + \ell$.
   $P_{n+2}(0) = A_{n+1}(0) + \ell$ et $P_{n+2}(1) = A_{n+1}(1) + k + \ell = A_{n+1}(0) + k + \ell = P_{n+2}(0) + k$.
   Mais d'après c. $(n+2 \geqslant 2)$, on a $P_{n+2}(0) = P_{n+2}(0)$, donc $k = 0$. On en déduit finalement que $P_{n+1} = A_{n+1}$. L'égalité se transmet du rang n au rang $n+1$.

   On a donc prouvé par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, P_n = A_n$ *i.e.* (A_n) est bien l'unique suite de polynômes vérifiant ces trois propriétés.

3. Considérons $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $B_n(X) = (-1)^n A_n(1-X)$.
   (a) $B_0(X) = (-1)^0 A_0(1-X) = 1$;
   (b) pour tout entier $n \geqslant 1$, $B'_n(X) = (-1)^n\left(-A'_n(1-X)\right) = (-1)^{n-1}A'_{n-1}(1-X) = B_{n-1}(X)$
   (c) Soit $n \geqslant 2$. $\begin{cases} B_n(0) = (-1)^n A_n(1-0) = (-1)^n A_n(1) \\ B_n(1) = (-1)^n A_n(1-1) = (-1)^n A_n(0) \end{cases}$
   Mais $A_n(1) = A_n(0)$, donc finalement $B_n(0) = B_n(1)$

   D'après la question précédente, la suite (B_n) est égale à la suite (A_n), i.e.
   $\forall n \in \mathbb{N}, \quad (-1)^n A_n(1-X) = A_n(X)$, ou encore $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n(1-X) = (-1)^n A_n(X)$.

4. Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.
   — Pour $n = 1$, $A_1(X+1) - A_1(X) = \left((X+1) - \dfrac{1}{2}\right) - \left(X + -\dfrac{1}{2}\right) = 1 = \dfrac{X^0}{0!}$;
   — Supposons que $A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$ pour un certain $n \geqslant 1$.
   On a donc $A'_{n+1}(X+1) - A'_{n+1}(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$, et en *intégrant* :
   $$A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \frac{X^n}{n!} + k.$$
   Mais $A_{n+1}(1) - A_{n+1}(0)$ donc $0 = \dfrac{0^n}{(n)!} + k$ et $k = 0$ (puisque $n \geqslant 1$.)
   On a encore $A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \dfrac{X^n}{n!}$. La propriété est bien héréditaire.
   En conclusion, $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n(X+1) - A_n(X) = \dfrac{X^{n-1}}{(n-1)!}$.

5. Soit $n = 2p+1$ un entier impair supérieur ou égal à 3.
   (a) D'après la question 3., on a $A_n(1-X) = (-1)^n A_n(X) = -A_n(X)$ puisque n est impair.
   Par conséquent, $A_n(1) = -A_n(0)$. Mais d'autre part, si $n \leqslant 2$, on sait que $A_n(1) = A_n(0)$, d'où finalement $A_n(1) = A_n(0) = 0$.
   On a aussi $A_n\left(1 - \dfrac{1}{2}\right) = -A_n\left(\dfrac{1}{2}\right)$ et donc $A_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$.
   En d'autres termes, $0, 1$ et $\dfrac{1}{2}$ sont des racines (distinctes) de A_n.
   A_n est donc divisible par $X(X-1)\left(X - \dfrac{1}{2}\right)$, ou encore par le polynôme associé : $X(X-1)(2X-1)$.
   Si n est impair et supérieur à 3, alors $X(X-1)(2X-1)\,|A_n$.
   (b) Par définition de (A_n), le terme constant de A_{2p+1} est a_{2p+1}, i.e.$A_{2p+1}(0) = a_{2p+1}$.
   Or on a vu que 0 était une racine de A_{2p+1} pour $p \geqslant 1$.
   Donc, $\forall p \geqslant 1, a_{2p+1} = 0$.
   (c) Grâce à toutes les informations on peut écrire les polynômes A_5, A_6 et A_7 sans trop de calculs fastidieux :
   — $A'_5 = A_4$ et le terme constant de A_5 est $a_5 = 0$.
   Par conséquent, $A_5 = \dfrac{1}{24}\dfrac{X^5}{5} - \dfrac{1}{12}\dfrac{X^4}{4} + \dfrac{1}{24}\dfrac{X^3}{3} - \dfrac{1}{720}X + 0 = \dfrac{X^5}{120} - \dfrac{X^4}{48} + \dfrac{X^3}{72} - \dfrac{X}{720}$.
   — $A'_6 = A_5$ et le terme constant de A_5 est a_6.
   $A_6 = \dfrac{1}{120}\dfrac{X^6}{6} - \dfrac{1}{48}\dfrac{X^5}{5} + \dfrac{1}{72}\dfrac{X^4}{4} - \dfrac{1}{720}\dfrac{X^2}{2} + a_6 = \dfrac{X^6}{720} - \dfrac{X^5}{240} + \dfrac{X^4}{288} - \dfrac{X^2}{1440} + a_6$.

— $A_7' = A_6$ et le terme constant de A_7 est $a_7 = 0$.
$A_7 = \frac{1}{720}\frac{X^7}{7} - \frac{1}{240}\frac{X^6}{6} + \frac{1}{288}\frac{X^5}{5} - \frac{1}{1440}\frac{X^3}{3} + a_6X = \frac{X^7}{5040} - \frac{X^6}{1440} + \frac{X^5}{1440} - \frac{X^3}{4320} + a_6X.$
La constante a_6 peut être déterminée par le fait que $A_7(0) = A_7(1)$.
Cela donne $0 = \frac{1}{5040} - \frac{1}{1440} + \frac{1}{1440} - \frac{1}{4320} + a_6$, c'est-à-dire $a_6 = \frac{1}{30240}$.

$$A_5 = \frac{X^5}{120} - \frac{X^4}{48} + \frac{X^3}{72} - \frac{X}{720}$$
$$A_6 = \frac{X^6}{720} - \frac{X^5}{240} + \frac{X^4}{288} - \frac{X^2}{1440} + \frac{1}{30240}$$
$$A_7 = \frac{X^7}{5040} - \frac{X^6}{1440} + \frac{X^5}{1440} - \frac{X^3}{4320} + \frac{X}{30240}$$

6. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $m \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n(m) = \sum_{k=1}^{m} k^n = 1^n + 2^n + \cdots + m^n$.

(a) D'après la question 4., pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X) = \frac{X^n}{n!}$.
On peut donc exprimer $X^n = n!\,[A_{n+1}(X+1) - A_{n+1}(X)]$.
De ce fait, $S_n(m) = \sum_{k=1}^{m} k^n = \sum_{k=0}^{m} k^n = \sum_{k=0}^{m} n!\,[A_{n+1}(k+1) - A_{n+1}(k)] = n!\,[A_{n+1}(m+1) - A_{n+1}(0)]$.
On a $A_{n+1}(0) = a_{n+1}$, mais il reste à exprimer $A_{n+1}(m+1)$ en fonction de $A_{n+1}(m)$. D'après la question 4. $A_{n+1}(m+1) - A_{n+1}(m) = \frac{m^n}{n!}$, d'où finalement :

$$S_n(m) = n!\left[\frac{m^n}{n!} + A_{n+1}(m) - a_{n+1}\right]$$

et

$$S_n(m) = m^n + n!\,[A_{n+1}(m) - a_{n+1}]\,.$$

(b) On obtient par conséquent :
$S_1(m) = m + 1!\,[A_2(m) - a_2] = m + A_2(m) - a_2 = m + \frac{m^2}{2} - \frac{m}{2} = \frac{m(m+1)}{2}$
$S_2(m) = m^2 + 2!\,[A_3(m) - a_3] = m^2 + 2\left[\frac{m^3}{6} - \frac{m^2}{4} + \frac{m}{12}\right] = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
$S_3(m) = m^3 + 3!\,[A_4(m) - a_4] = m^3 + 6\left[\frac{m^4}{24} - \frac{m^3}{12} + \frac{m^2}{24}\right] = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$
$S_4(m) = m^4 + 4!\,[A_5(m) - a_5] = m^4 + 24\left[\frac{m^5}{120} - \frac{m^4}{48} + \frac{m^3}{72} - \frac{m}{720}\right]$
$= \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}$
On retrouve :

- $\sum_{k=1}^{m} k = \frac{m(m+1)}{2}$
- $\sum_{k=1}^{m} k^2 = \frac{m(m+1)(2m+1)}{6}$
- $\sum_{k=1}^{m} k^3 = \frac{m^2(m+1)^2}{4}$
- $\sum_{k=1}^{m} k^4 = \frac{m(m+1)(2m+1)(3m^2+3m-1)}{30}$