Polynômes ■ Matrices

Exercice 1 : On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1 *Question de cours :* Justifier que f admet un développement limité à tout ordre $n \in \mathbb{N}$ au voisinage de 0.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f(x) \underset{x \to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$

2 Calculer a_0, a_1 et a_2.

3 Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0$.

4 Prouver que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est 3-périodique *i.e.* $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $a_{n+3} = a_n$.

5 Applications :

① Donner le développement de f au voisinage de 0 à l'ordre 6.

② En déduire l'allure locale au voisinage de 0 de sa courbe représentative (*graphe, tangente et positions relatives*).

③ Déterminer $f^{(k)}(0)$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$. *Justifier avec soin.*

Exercice 2 : On note $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$.

1 Calculer $\mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3$.

2 En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

3 On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$. Déterminer les trois racines de P.

4 Pour $n \in \mathbb{N}$, donner le reste dans la division euclidienne de X^n par P.

5 En déduire pour tout $n \in \mathbb{N}$ l'expression de A^n en fonction de A^2, A et I_3.

Exercice 3 :

1 ① Donner une primitive de $x \longmapsto \dfrac{2x-1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

② Déterminer toutes les solutions de l'équation différentielle :

$$(1+x^2)y' + (2x-1)y = 0 \quad \text{(E)}.$$

③ On note f la solution de (E) vérifiant $f(0) = 1$. Préciser l'expression de f.

④ Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

2 ① À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme P_n à coefficients réels vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}.$$

② Établir que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathrm{P}_{n+1} = (1-(2n+2)\mathrm{X})\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'.$$

3 ① Expliciter les polynômes $\mathrm{P}_0, \mathrm{P}_1, \mathrm{P}_2$ et P_3.

② Prouver que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, P_n est de degré n et son coefficient dominant est $\alpha_n = (-1)^n(n+1)!$.

4 ① *Question de cours :* Énoncer la formule de Leibniz.

② En dérivant n fois par rapport à x l'égalité $(1+x^2)f'(x) = (1-2x)f(x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathrm{P}_{n+1}(x) = a_n(x)\mathrm{P}_n(x) + b_n(x)\mathrm{P}_{n-1}(x)$$

où a_n et b_n sont des fonctions polynomiales simples que l'on déterminera.

5 Établir, pour tout entier $n \geqslant 1$:

$$\mathrm{P}_n' = -n(n+1)\mathrm{P}_{n-1}.$$

6 ① Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle commune.

② En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1$, toute racine réelle de P_n est simple.

7 ① Pour tout entier $n \geqslant 2$: montrer que si r_1 et r_2 sont deux racines réelles de P_n (en supposant leur existence), avec $r_1 < r_2$, alors le polynôme P_{n-1} possède au moins une racine (réelle) dans l'intervalle $]r_1, r_2[$.

② Pour tout entier $n \geqslant 2$: montrer que si P_n a toutes ses racines réelles, alors il en est de même pour P_{n-1}.