Polynômes ■ Matrices

Exercice 1 : On définit la fonction f par $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$.

1. f est une fonction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, et en particulier en 0.
D'après le théorème de Taylor-Young, f admet alors en 0 un (unique) développement limité à tout ordre n donné par :
$$f \underset{x\to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + \mathrm{o}\left(x^n\right).$$
L'énoncé pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(x) \underset{x\to 0}{=} a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \mathrm{o}\left(x^n\right)$.
Par unicité de la partie régulière d'un DL, on peut déjà en déduire que :
$$\forall k \in \mathbb{N},\ a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}.$$

2. $$f(x) = \frac{1}{1+(x+x^2)} \underset{x\to 0}{=} 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right)$$
$$\underset{x\to 0}{=} 1 - (x+x^2) + x^2 + \mathrm{o}\left(x^2\right) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \mathrm{o}\left(x^2\right).$$
On a donc $a_0 = 1$, $a_1 = -1$ et $a_2 = 0$.

3. Soit $n \in \mathbb{N}$.
On a $\dfrac{1}{1+x+x^2} \underset{x\to 0}{=} \displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+2}\right)$ donc $1 \underset{x\to 0}{=} (1+x+x^2)\left[\displaystyle\sum_{k=0}^{n+2} a_k x^k + \mathrm{o}\left(x^{n+2}\right)\right]$.
On a ainsi écrit le DL à l'ordre $n+1$ de la fonction constante égale à 1. Tous les termes en x^k avec $k \geqslant 1$ sont donc nuls.
Or, le terme en x^{n+2} est $(a_n + a_{n+1} + a_{n+2})x^{n+2}$.
On peut donc conclure que $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0$.

4. Montrons que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3-périodique.
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} a_{n+3} &= -a_{n+2} - a_{n+1} \text{ car } a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} = 0 \\ &= a_n \text{ car } a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 0 \end{aligned}$$
Par conséquent, la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est 3-périodique.

5. Applications :
   1. On a $a_6 = a_3 = a_0 = 1$, $a_4 = a_1 = -1$ et $a_5 = a_2 = 0$.
   Donc
   $$f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + x^3 - x^4 + x^6 + \mathrm{o}\left(x^6\right).$$
   2. — A fortiori, $f(x) \underset{x\to 0}{=} 1 - x + \mathrm{o}\left(x\right)$.
   On en déduit que la courbe de f admet pour tangente la droite d'équation $y = 1 - x$ au point d'abscisse 0.
   — Comme $f(x) - (1-x) \underset{x\to 0}{=} x^3 + \mathrm{o}\left(x^3\right)$. on peut en déduire que la courbe est (localement) au-dessus de sa tangente pour $x > 0$ et en dessous pour $x < 0$.
   Le point $\mathrm{A}(0, 1)$ est donc un **point d'inflexion** de la courbe de f.
   3. D'après la remarque faite à la question 1, on a $f^{(k)}(0) = k!a_k$ pour tout entier $k \in \mathbb{N}$.
   Donc $\forall p \in \mathbb{N}$, $f^{(3p)}(0) = (3p)!$, $\quad f^{(3p+1)}(0) = -(3p+1)!\quad$ et $\quad f^{(3p+2)}(0) = 0$.

Exercice 2 :

1. $\mathrm{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & -4 \end{pmatrix}$, $\mathrm{A}^2 = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -7 & 0 & 8 \end{pmatrix}$ et $\mathrm{A}^3 = \begin{pmatrix} 9 & 1 & -10 \\ 6 & 1 & -6 \\ 17 & 1 & -18 \end{pmatrix}$.
$$\text{Donc,}\quad \mathrm{A}^3 + 2\mathrm{A}^2 - \mathrm{A} - 2\mathrm{I}_3 = 0_3.$$

2. On a donc $\mathrm{A}\left[\dfrac{1}{2}(\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)\right] = \left[\dfrac{1}{2}(\mathrm{A}^2 + 2\mathrm{A} - \mathrm{I}_3)\right]\mathrm{A} = \mathrm{I}_3$.
Par conséquent, A est inversible et $\mathrm{A}^{-1} = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3. On pose $\mathrm{P} = \mathrm{X}^3 + 2\mathrm{X}^2 - \mathrm{X} - 2$. 1 est une racine évidente de P.
Par division euclidienne, on a donc $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}^2 + 3\mathrm{X} + 2)$ puis $\mathrm{P} = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)$.
$$\text{Les trois racines de P sont donc : } -2,\ -1 \text{ et } 1.$$

4. La division euclidienne de X^n par P s'écrit $\mathrm{X}^n = \mathrm{PQ} + \mathrm{R}$ avec $\deg \mathrm{R} < \deg \mathrm{P}$, i.e. $\deg \mathrm{R} \leqslant 2$.
On peut poser $\mathrm{R} = a_n \mathrm{X}^2 + b_n \mathrm{X} + c_n$.
D'où $\mathrm{X}^n = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)(\mathrm{X}+2)\mathrm{Q} + (a_n\mathrm{X}^2 + b_n\mathrm{X} + c_n)$.
On a donc $\begin{cases} 1^n = a_n + b_n + c_n \\ (-1)^n = a_n - b_n + c_n \\ (-2)^n = 4a_n - 2b_n + c_n \end{cases}$ i.e. $\begin{cases} a_n = \frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-2)^n \\ b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n \\ c_n = \frac{1}{3} + (-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^n \end{cases}$
D'où $\mathrm{R} = \left[\dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{2}(-1)^n + \dfrac{1}{3}(-2)^n\right]\mathrm{X}^2 + \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2}(-1)^n\right]\mathrm{X} + \left[\dfrac{1}{3} + (-1)^n - \dfrac{1}{3}(-2)^n\right]$.

5. On a $\mathrm{A}^n = \underbrace{\mathrm{P(A)}}_{=(0)_3}\mathrm{Q(A)} + \mathrm{R(A)} = \mathrm{R(A)}$
$$\forall n \in \mathbb{N},\quad \mathrm{A}^n = \left[\frac{1}{6} - \frac{1}{2}(-1)^n + \frac{1}{3}(-2)^n\right]\mathrm{A}^2 + \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{2}(-1)^n\right]\mathrm{A} + \left[\frac{1}{3} + (-1)^n - \frac{1}{3}(-2)^n\right]\mathrm{I}_3.$$

Exercice 3 :

1.
   1. $-\displaystyle\int \frac{2x-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{2x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\ln|1+x^2| + \arctan x + \mathrm{C}$ où $\mathrm{C} \in \mathbb{R}$.
   2. Comme $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, E est normalisable : (E) $\iff y' + \dfrac{2x-1}{1+x^2}y = 0$
   Les solutions de E sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions
   $$y : x \longmapsto \lambda e^{-\int \frac{2x-1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x} = \lambda e^{-\ln(1+x^2) + \arctan x} \quad \text{où } \lambda \in \mathbb{R}.$$
   $$= \lambda \frac{e^{\arctan x}}{e^{\ln(1+x^2)}} = \lambda \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}.$$
   $$\text{Donc, } \mathcal{S} = \left\{ x \mapsto \lambda \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$
   3. Soit $f \in \mathcal{S}$.
   $$f(0) = 1 \implies \lambda \frac{e^{\arctan 0}}{1+0^2} = 1 \implies \lambda = 1.$$
   D'où $f : x \longmapsto \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2}$.

④ Comme composée et quotient de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas, la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

2 ① — Pour $n=0$, on peut écrire $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(0)}(x) = f(x) = \dfrac{e^{\arctan x}}{1+x^2} = \dfrac{\mathrm{P}_0(x)}{(1+x^2)^{0+1}}\, e^{\arctan(x)}$ en posant $\mathrm{P}_0 = 1 \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

— Supposons que pour un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé, on ait $\forall x \in \mathbb{R}$, $f^{(n)}(x) = \dfrac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}$.

Alors, $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{P}_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)} + \mathrm{P}_n(x)\frac{-(n+1)(2x)}{(1+x^2)^{n+2}}\, e^{\arctan(x)} + \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\frac{1}{1+x^2}\, e^{\arctan(x)} \\
&= \left[\frac{\mathrm{P}_n'(x)}{(1+x^2)^{n+1}} - \mathrm{P}_n(x)\frac{(n+1)(2x)}{(1+x^2)^{n+2}} + \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\right] e^{\arctan(x)} \\
&= \frac{(1+x^2)\mathrm{P}_n'(x) - (n+1)(2x)\mathrm{P}_n(x) + \mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}
\end{aligned}$$

En posant $\mathrm{P}_{n+1} = (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n' + [1-(2n+2)\mathrm{X}]\,\mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

$$= \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}$$

La propriété est encore vraie au rang $n+1$.

La propriété étant vraie pour $n=0$ et héréditaire, on a donc montré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists \mathrm{P}_n \in \mathbb{R}[\mathrm{X}], \forall x \in \mathbb{R}, \quad f^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}.$$

② Simple conséquence du raisonnement précédent en précisant que $\mathrm{P}_0 = 1$:

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathrm{P}_{n+1} = [1-(2n+2)\mathrm{X}]\,\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n'.$$

3 ① En utilisant ces données, on a :

$$\begin{cases} \mathrm{P}_0 = 1 \\ \mathrm{P}_1 = 1-2\mathrm{X} \\ \mathrm{P}_2 = 6\mathrm{X}^2 - 6\mathrm{X} - 1 \\ \mathrm{P}_3 = -24\mathrm{X}^3 + 36\mathrm{X}^2 + 12\mathrm{X} - 7 \end{cases}$$

② Montrons par récurrence que le monôme dominant de P_n est $\alpha_n \mathrm{X}^n$ avec $\alpha_n = (-1)^n(n+1)!$.

— La formule est vérifiée pour $n=0$.

— Supposons que pour un entier n fixé ($n \in \mathbb{N}$) on ait $\mathrm{P}_n = \alpha_n\mathrm{X}^n + \cdots$ avec $\alpha_n = (-1)^n(n+1)!$.
Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{n+1} &= (1-(2n+2)\mathrm{X})\mathrm{P}_n + (1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_n' \\
&= (1-(2n+2)\mathrm{X})(\alpha_n\mathrm{X}^n + \cdots) + (1+\mathrm{X}^2)(n\alpha_n\mathrm{X}^{n-1} + \cdots) \\
&= -(2n+2)\alpha_n\mathrm{X}^{n+1} + \cdots + n\alpha_n\mathrm{X}^{n+1} + \cdots \\
&= -(n+2)\alpha_n\mathrm{X}^{n+1} + \cdots
\end{aligned}$$

Comme $-(n+2)\alpha_n \neq 0$, le polynôme P_{n+1} est de degré $n+1$ et son coefficient dominant est :
$-(n+2)\alpha_n = -(n+2)(-1)^n(n+1)! = (-1)^{n+1}(n+2)!$: la propriété est encore vérifiée au rang $n+1$.

4 ① Si f et g sont deux fonctions n fois dérivables, alors la fonction fg est également n fois dérivable, et la formule de Leibniz s'écrit :

$$(fg)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}.$$

② Soit $n \in \mathbb{N}$.
Remarquons que f est solution de E, donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) + (2x-1)f(x) = 0$.
On en déduit que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad (1+x^2)f'(x) = (1-2x)f(x)$.

— Les fonctions $x \mapsto 1+x^2$ et f' étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur produit est dérivable au moins n fois et, d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1+x^2)f'(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(1+x^2)\right] f'^{(n-k)}(x) \\
&= (1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n(2x)f^{(n)}(x) + \frac{n(n-1)}{2}2f^{(n-1)}(x) \\
&= (1+x^2)\frac{\mathrm{P}_{n+1}(x)}{(1+x^2)^{n+2}}\, e^{\arctan(x)} + 2nx\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)} \\
&\qquad + n(n-1)\frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}\, e^{\arctan(x)} \\
&= \frac{\mathrm{P}_{n+1}(x) + 2nx\mathrm{P}_n(x) + n(n-1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}
\end{aligned}$$

— Les fonctions $x \mapsto 1-2x$ et f étant de classe $\mathcal{C}^\infty$, leur produit est dérivable n fois, et d'après la formule de Leibniz :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left[(1-2x)f(x)\right] &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left[(1-2x)\right] f^{(n-k)}(x) \\
&= (1-2x)f^{(n)}(x) + n(-2)f^{(n-1)}(x) \\
&= (1-2x)\frac{\mathrm{P}_n(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)} - 2n\frac{\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}\, e^{\arctan(x)} \\
&= \frac{(1-2x)\mathrm{P}_n(x) - 2n(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}
\end{aligned}$$

Les fonctions $x \mapsto (1+x^2)f'(x)$ et $x \mapsto (1-2x)f(x)$ étant égales, leurs dérivées n-ièmes sont égales.
D'où $\forall x \in \mathbb{R}$,

$$\frac{\mathrm{P}_{n+1}(x) + 2nx\mathrm{P}_n(x) + n(n-1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)} = \frac{(1-2x)\mathrm{P}_n(x) - 2n(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x)}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}.$$

On peut simplifier par $\dfrac{1}{(1+x^2)^{n+1}}\, e^{\arctan(x)}$ qui n'est jamais nul :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_{n+1}(x) + 2nx\mathrm{P}_n(x) + n(n-1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x) = (1-2x)\mathrm{P}_n(x) - 2n(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

Donc,

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{P}_{n+1}(x) = [1-(2n+2)x]\,\mathrm{P}_n(x) - n(n+1)(1+x^2)\mathrm{P}_{n-1}(x).$$

5 Comme les fonctions polynomiales coïncident pour une infinité de valeurs, les polynômes sont égaux :

$$\mathrm{P}_{n+1} = [1-(2n+2)\mathrm{X}]\,\mathrm{P}_n - n(n+1)(1+\mathrm{X}^2)\mathrm{P}_{n-1}.$$

Or, on a vu en 2.2 que $P_{n+1} = [1-(2n+2)X]\,P_n + (1+X^2)P'_n$.
En soustrayant les deux égalités, on obtient :

$$(1+X^2)P'_n + n(n+1)(1+X^2)P_{n-1} = 0$$
$$(1+X^2)\left[P'_n + n(n+1)P_{n-1}\right] = 0.$$

$\mathbb{R}[X]$ étant intègre, on en déduit finalement que :

$$\forall\, n \geqslant 1,\ P'_n + n(n+1)P_{n-1} = 0.$$

6 1 Soit $n \geqslant 1$. Supposons que P_n et P_{n+1} aient une racine réelle commune α.
Comme $P_{n+1} = [1-(2n+2)X]\,P_n - n(n+1)(1+X^2)P_{n-1}$, en évaluant cette expression en α, on obtient :

$$0 = 0 - n(n+1)(1+\alpha^2)P_{n-1}(\alpha).$$

Or ,$n \geqslant 1$ donc $-n(n+1)(1+\alpha^2) \neq 0$ et par conséquent, $P_{n-1}(\alpha) = 0$. α est encore une racine de P_{n-1}.
En réitérant le raisonnement, α est également racine de $P_{n-2}, \cdots, P_2, P_1$ et enfin de P_0.
C'est absurde car $P_0 = 1$ n'a pas de racine !
On en déduit que P_n et P_{n+1} n'ont aucune racine réelle commune.

2 Soit $n \geqslant 1$ et supposons que P_n admette une racine réelle multiple α.
On a alors $P_n(\alpha) = P'_n(\alpha) = 0$.
Or, $P'_n = -n(n+1)P_{n-1}$
En évaluant cette expression en α, on obtient

$$0 = -n(n+1)P_{n-1}(\alpha).$$

Puisque $-n(n+1) \neq 0$, α est racine de P_{n-1}. C'est absurde car on a prouvé que c'était impossible.
Pour tout entier $n \geqslant 1$, les racines réelles de P_n sont donc simples.

7 1 Soit $n \geqslant 2$. Supposons qu'on ait deux racines réelles r_1 et r_2 de P_n. On suppose $r_1 < r_2$.
Comme :

— P_n est continue sur $[r_1, r_2]$;
— P_n est dérivable sur $]r_1, r_2[$;
— $P_n(r_1) = P_n(r_2)$

en utilisant le théorème de Rolle, on peut en déduire que P'_n possède au moins une racine c dans $]r_1, r_2[$.
En tenant compte de $P'_n = -n(n+1)P_{n-1}$, c est encore racine de P_{n-1} (puisque $-n(n+1) \neq 0$).

Donc, P_{n-1} possède au moins une racine (réelle) dans l'intervalle $]r_1, r_2[$.

2 Soit $n \geqslant 2$. Supposons que P_n a toutes ses racines réelles.
D'après la question 6.1, on sait que ces racines sont simples.
D'après la question 3.2 $\deg(P_n) = n$ donc P_n admet n racines distinctes : $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$.
On a vu en 7.1. que P_{n-1} possédait au moins une racine réelle c_i sur chaque $]r_i, r_{i+1}[$.
On obtient donc $n-1$ racines réelles distinctes pour P_{n-1} qui est de degré $n-1$ et qui ne peut donc en compter davantage.
On peut alors conclure que :

Si P_n a toutes ses racines réelles, alors il en est de même pour P_{n-1}.