Espaces vectoriels

Exercice 1 (Polynômes de Legendre) : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'ensemble E_n des polynômes à coefficients réels de degré n au plus.

On pose pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathbb{R}[\mathrm{X}] \\ \mathrm{P} & & (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{P}' - k(k+1)\mathrm{P} \end{array}$$

1 ① Montrer que E_n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

② Montrer que f_n est un endomorphisme de E.

2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X}^2-1)^k$ et $\mathrm{L}_k = \mathrm{P}_k^{(k)}$.

① Déterminer le degré de L_k.

② En remarquant que $\mathrm{X}^2-1 = (\mathrm{X}-1)(\mathrm{X}+1)$ et en utilisant la formule de Leibniz, déterminer $\mathrm{L}_n(1)$ et $\mathrm{L}_n(-1)$.

③ Montrer que $\mathrm{P}_n = (\mathrm{X}^2-1)^n$ vérifie : $(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}' - 2n\mathrm{X}\mathrm{P} = 0$.
En déduire que $\mathrm{L}_n \in \ker f_n$.

Exercice 2 : Soient $\mathrm{E}, \mathrm{F}, \mathrm{G}$ sont trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels, $f \in \mathcal{L}(\mathrm{E}; \mathrm{F})$ et $g, h \in \mathcal{L}(\mathrm{F}; \mathrm{G})$.

Montrer que $\ker(g \circ f) = \ker(h \circ f) \iff \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(h)$.

Exercice 3 : Soit $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x - z = 0\right\}$ et $\mathrm{G} = \mathbb{R}(1, 1, 0)$.

1 Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2 Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$.

3 On considère p le projecteur sur F parallèlement à G.
Déterminer $p(u)$ où $u = (1, 2, 3)$.