Espaces vectoriels en dimension finie

Les trois parties sont indépendantes.

Partie A : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

Montrer que F et G sont supplémentaires dans E.

Partie B : Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on définit $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^{kx} \end{array}$.

On pose $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\left(\{f_0, f_1, f_2, f_3\}\right)$.

1. Démontrer que pour tout $f \in \mathrm{E}$, $f'' - 3f' + 2f \in \mathrm{E}$.
2. On note $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ f & & f'' - 3f' + 2f \end{array}$. Montrer que $\Psi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.
3. Démontrer que la famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre.
4. Déterminer $\mathrm{U} = \ker \Psi$. Que peut-on en déduire pour Ψ ?
5. Déterminer $\mathrm{W} = \ker(\Psi - 2\mathrm{I}d_{\mathrm{E}})$.
6. Vérifier que U et W sont supplémentaires dans E.

Partie C : On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants :

— $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y = z\right\}$

— $\mathrm{G} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z - t = 0, x - y + 3z + 5t = 0\right\}$

Déterminer $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases respectives de F et G. Compléter $\mathcal{B}$ en une base de E.

Partie D : Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère les matrices élémentaires $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$.

Déterminer le produit $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell}$.