Espaces vectoriels

Exercice 1 (Polynômes de Legendre) :

1 ① Toute combinaison linéaire de polynômes de degré au plus n est un polynôme donc E_n, non vide, est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[\mathrm{X}]$.

② Deux choses à montrer :

i. Soit $\mathrm{P} \in \mathrm{E}_n$, alors $\deg f_n(\mathrm{P}) \leqslant \max(2 + \deg \mathrm{P} - 2;\, 1 + \deg \mathrm{P} - 1;\, \deg \mathrm{P}) \leqslant n$.
Donc $f_n(\mathrm{P}) \in \mathrm{E}_n$ qui est stable par f_n.

ii. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et P, Q deux polynômes de degré au plus n.
Par linéarité de la dérivation, on a :

$$\begin{aligned} f_n(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) &= (\mathrm{X}^2-1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})'' + 2\mathrm{X}(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q})' - k(k+1)(\lambda\mathrm{P}+\mathrm{Q}) \\ &= \lambda\Big((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{P}' - k(k+1)\mathrm{P}\Big) + (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{Q}'' + 2\mathrm{X}\mathrm{Q}' - k(k+1)\mathrm{Q} \\ &= \lambda f_n(\mathrm{P}) + f_n(\mathrm{Q}). \end{aligned}$$

L'application f_n est donc linéaire.

En conclusion, $f_n \in \mathcal{L}(\mathrm{E}_n)$.

2 Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $\mathrm{P}_k = (\mathrm{X}^2-1)^k$ et $\mathrm{L}_k = \mathrm{P}_k^{(k)}$.

① Comme $\deg \mathrm{P}_k = 2k$ alors $\deg \mathrm{L}_k = 2k - k = k$.

② Appliquons la formule de Leibniz au produit $(\mathrm{X}-1)^n \times (\mathrm{X}+1)^n$:

$$\mathrm{L}_n = \mathrm{P}_n^{(n)} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \Big((\mathrm{X}-1)^n\Big)^{(j)} \Big((\mathrm{X}+1)^n\Big)^{(n-j)}$$

Comme $\Big((\mathrm{X}-1)^n\Big)^{(j)}(1) \neq 0 \iff j = n$, on a :

$$\mathrm{L}_n(1) = \Big((\mathrm{X}+1)^n\Big)^{(0)} = 2^n n!.$$

De même, $\Big((\mathrm{X}+1)^n\Big)^{(n-j)}(-1) \neq 0 \iff j = 0$, d'où

$$\mathrm{L}_n(-1) = \Big((\mathrm{X}-1)^n\Big)^{(0)} = (-2)^n n!.$$

③ Il suffit de calculer avec $\mathrm{P}_n' = 2n\mathrm{X}(\mathrm{X}^2-1)^{n-1}$.
Donc,

$$(\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n' = 2n\mathrm{X}\mathrm{P}_n \qquad \text{(XX.1)}$$

À l'aide de la formule de Leibniz, dérivons la relation (XX.1), $n+1$ fois :
Comme $(\mathrm{X}^2-1)^{(i)} = 0$ pour tout $i > 2$, on a :

$$\begin{aligned} \Big((\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n'\Big)^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (\mathrm{X}^2-1)^{(i)} \mathrm{P}_n^{(n+1-i+1)} \\ &= \binom{n+1}{0} (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \binom{n+1}{1} (2\mathrm{X})\mathrm{P}_n^{(n+1)} + \binom{n+1}{2} (2)\mathrm{P}_n^{(n)} \\ &= (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + 2(n+1)\mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} + n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}. \end{aligned}$$

De la même manière pour le second membre :

$$\begin{aligned} \Big(2n\mathrm{X}\mathrm{P}_n\Big)^{(n+1)} &= \sum_{i=0}^{n+1} \binom{n+1}{i} (2\mathrm{X})^{(i)} \mathrm{P}_n^{(n+1-i)} \\ &= (2n\mathrm{X})\mathrm{P}_n^{(n+1)} + 2n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}. \end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à égaliser les deux relations précédentes :

$$\begin{gathered} (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \cancel{2(n+1)}\mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} + \cancel{n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}} = \cancel{(2n\mathrm{X})\mathrm{P}_n^{(n+1)}} + \cancel{2}n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)} \\ (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} = n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)}. \end{gathered}$$

Enfin, $0 = (\mathrm{X}^2-1)\mathrm{P}_n^{(n+2)} + \mathrm{X}\mathrm{P}_n^{(n+1)} - n(n+1)\mathrm{P}_n^{(n)} = f_n(\mathrm{L}_n)$ et $\mathrm{L}_n \in \ker f_n$.

Un peu d'histoire: *En mathématiques et en physique théorique, les polynômes de Legendre constituent l'exemple le plus simple d'une suite de polynômes orthogonaux.*

Ce sont des solutions polynomiales $\mathrm{P}_n(x)$, sur l'intervalle $x \in [-1\,;1]$, de l'équation différentielle de Legendre :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{P}_n(x)\right] + n(n+1)\,\mathrm{P}_n(x) = 0,$$

dans le cas particulier où le paramètre n est un entier naturel.

Exercice 2 :

On raisonne par double implication :

— Supposons que $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(h)$ et soit $x \in \ker(g \circ f)$

Alors, $f(x) \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(h)$

Donc $(h \circ f)(x) = h(f(x)) = 0$ et $x \in \ker(h \circ f)$ *i.e.* $\ker(g \circ f) \subset \ker(h \circ f)$

Par symétrie, on a l'égalité.

— Réciproquement, supposons $\ker(g \circ f) = \ker(h \circ f)$ et soit $y \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g)$.

Alors, il existe $x \in \mathrm{E}$ tel que $y = f(x)$ et $0 = g(y) = g(f(x)) \implies x \in \ker(g \circ f) = \ker(h \circ f)$.

D'où $h(y) = h(f(x)) = 0$ et $y \in \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(h)$ *i.e.* $\mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) \subset \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(h)$.

Par symétrie, on a l'égalité.

En conclusion, $\ker(g \circ f) = \ker(h \circ f) \iff \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(g) = \mathrm{Im}\,(f) \cap \ker(h)$.

Exercice 3 : Soit $F = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - z = 0\right\}$ et $G = \mathbb{R}(1,1,0)$.

1
- $(0,0,0) \in F$ donc $F \neq \varnothing$.
- Soient $(x,y,z), (x',y',z') \in F$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
  $\lambda(x,y,z) + (x',y',z') = (\underbrace{\lambda x + x'}_{X}, \lambda y + y', \underbrace{\lambda z + z'}_{Z})$.

  Or $X - Z = (\lambda x + x') - (\lambda z + z') = \lambda \underbrace{(x-z)}_{=0} + \underbrace{(x'-z')}_{=0} = 0$ car $\begin{cases} x - z = 0 \text{ puisque } (x,y,z) \in F \\ x' - z' = 0 \text{ puisque } (x',y',z') \in F \end{cases}$.

  On en déduit que $\lambda(x,y,z) + (x',y',z') \in F$.

On a prouvé que $\boxed{\text{F est un sous-espace vectoriel de } \mathbb{R}^3}$.

2
- Montrons que F et G sont en somme directe.
  Soit $(x,y,z) \in F \cap G$.
  Comme $(x,y,z) \in G$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $(x,y,z) = \lambda(1,1,0)$. On a alors $x = \lambda$, $y = \lambda$ et $z = 0$.
  D'autre part, $(x,y,z) \in F$ donc $x - z = 0$. On en déduit que $x = z = 0$. Donc $\lambda = 0$ et finalement $(x,y,z) = (0,0,0)$.
  On a prouvé que $F \cap G \subset \{(0,0,0)\}$.
  L'autre inclusion étant immédiate, on conclut que $\boxed{F \cap G = \{(0,0,0)\}}$.
- Montrons que $F \oplus G = \mathbb{R}^3$.
  - F et G étant des sev de $\mathbb{R}^3$, on a bien-sûr $F \oplus G \subset \mathbb{R}^3$.
  - Montrons que $\mathbb{R}^3 \subset F \oplus G$.
    Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Écrivons

    $$(x,y,z) = (z, y - x + z, z) + (x - z, x - z, 0).$$

    On a clairement $(z, y-x+z, z) \in F$ et $(x-z, x-z, 0) \in G$, donc $(x,y,z) \in F \oplus G$.
    On a montré que $\mathbb{R}^3 \subset F \oplus G$

  Bilan : $\boxed{F \oplus G = \mathbb{R}^3}$.

3 $u = (1,2,3) = \underbrace{(3,4,3)}_{\in F} + \underbrace{(-2,-2,0)}_{\in G}$.

Comme p est le projecteur sur F parallèlement à G, on a donc $\boxed{p(u) = (3,4,3)}$.