Espaces vectoriels en dimension finie

Partie A : Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$. On pose $\mathrm{F} = \{f \in \mathrm{E}, f(1) = f(0) = 0\}$ et G l'ensemble des fonctions affines sur $\mathbb{R}$.

- F et G sont des sev de E. AQT.
- F et G sont en somme directe : en effet $\mathrm{F} \cap \mathrm{G} = \{0\}$. On procède par double inclusion. $\supset$ est immédiate. Pour établir $\subset$, on prend une fonction $f \in \mathrm{F} \cap \mathrm{G}$. Elle est affine et s'annule en 0 et en 1. Elle est donc nulle. CQFD.
- Pour montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$, on procède par double inclusion. $\subset$ est immédiate. Soit maintenant $\phi \in \mathrm{E}$. Montrons qu'on a $\phi = f + g$ avec $f \in \mathrm{F}$ et $g \in \mathrm{G}$. Une analyse mène à $g : x \mapsto \phi(0) + [\phi(1) - \phi(0)]x$ et $f = \phi - g$. On peut alors vérifier que :
  - $\phi = f + g$
  - $f \in \mathrm{F}$
  - $g \in \mathrm{G}$

Donc, $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathrm{E}$.

Partie B : Pour $k \in [\![0, 3]\!]$, on définit $f_k : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longmapsto & \mathbb{R} \\ x & & e^{kx} \end{array}$. On pose $\mathrm{E} = \mathrm{vect}\,(\{f_0, f_1, f_2, f_3\})$.

1. Soit $f \in \mathrm{E}$. Il existe quatre réels $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que $f = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k f_k$.

   Alors en ayant remarqué que $f_k' = kf_k$ et $f_k'' = k^2 f_k$, on a

$$f'' - 3f' + 2f = \sum_{k=0}^{3} \lambda_k k^2 f_k - 3\sum_{k=0}^{3} \lambda_k k f_k + 2\sum_{k=0}^{3} \lambda_k f_k = \sum_{k=0}^{3} (k^2 - 3k + 2)\lambda_k f_k \in \mathrm{E}$$

$$\boxed{\forall f \in \mathrm{E}, \quad f'' - 3f' + 2f \in \mathrm{E}}$$

2. On note $\Psi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ f & & f'' - 3f' + 2f \end{array}$.

   On vient de voir que Ψ est bien définie : si $f \in \mathrm{E}$, on a bien $f'' - 3f' + 2f \in \mathrm{E}$.
   - Soit $f, g \in \mathrm{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$.
     On a :
     $$\Psi(\lambda f + g) = (\lambda f + g)'' - 3(\lambda f + g)' + 2(\lambda f + g) = \lambda(f'' - 3f' + 2f) + (g'' - 3g' + 2g) = \lambda\Psi(f) + \Psi(g).$$
     On en déduit que Ψ est **linéaire**.
   - Comme son ensemble de définition est égal à son ensemble d'arrivée, Ψ est un **endomorphisme**.

Donc, $\Psi \in \mathcal{L}(\mathrm{E})$.

3. Supposons que $\sum_{k=0}^{3} \lambda_k f_k = 0$. Alors $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_0 + \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = 0$.

   On a donc, en faisant tendre x vers $-\infty$, et par unicité de la limite : $\lambda_0 = 0$.
   Il reste $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 e^x + \lambda_2 e^{2x} + \lambda_3 e^{3x} = 0$ et donc en simplifiant par $e^x \neq 0$:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lambda_1 + \lambda_2 e^x + \lambda_3 e^{2x} = 0.$$

   On fait tendre x vers $-\infty$, et on aboutit à $\lambda_1 = 0$.
   On réitère le raisonnement, et on trouve $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

   La famille (f_0, f_1, f_2, f_3) est libre. C'est donc une base de E.

4. Déterminons $\mathrm{U} = \ker \Psi$. Soit $f \in \mathrm{E}$.

$$f \in \mathrm{U} \iff f \in \ker \Psi \iff \Psi(f) = 0 \iff f'' - 3f' + 2f = 0$$

   On résout cette équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
   Son équation caractéristique est $r^2 - 3r + 2 = 0$, de solutions 1 et 2.
   D'où $f \in \mathrm{U} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f = \lambda f_1 + \mu f_2 \iff f \in \mathrm{vect}\,(f_1, f_2)$

   Donc, $\mathrm{U} = \mathrm{vect}\,(f_1, f_2)$.

   On en déduit que **Ψ n'est pas injective**.

5. Soit $\mathrm{W} = \ker(\Psi - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

$$f \in \mathrm{W} \iff f \in \ker(\Psi - 2\mathrm{Id}_{\mathrm{E}}) \iff \Psi(f) - 2f = 0 \iff f'' - 3f' = 0$$

   Il s'agit à nouveau d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants d'équation caractéristique est $r^2 - 3r = 0$, de solutions 0 et 3.
   D'où,
$$f \in \mathrm{W} \iff \exists \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad f = \lambda f_0 + \mu f_3 \iff f \in \mathrm{vect}\,(f_0, f_4)$$
   Donc, $\mathrm{W} = \mathrm{vect}\,(f_0, f_3)$.

6. On a vu que (f_0, f_1, f_2, f_3) était une base de E.
   D'après un théorème du cours, $\mathrm{vect}\,(f_1, f_2) \oplus \mathrm{vect}\,(f_0, f_4) = \mathrm{E}$ *i.e.* U et W sont supplémentaires dans E.

Partie C : On pose $\mathrm{E} = \mathbb{R}^4$. On considère les sous-espaces vectoriels suivants :
- $\mathrm{F} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x = y = z\right\}$
- $\mathrm{G} = \left\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0, z - t = 0, x - y + 3z + 5t = 0\right\}$

1. Soit $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} (x, y, z, t) \in \mathrm{F} &\iff x = y = z \\ &\iff (x, y, z, t) = (x, x, x, t) \\ &\iff (x, y, z, t) = (x, x, x, 0) + (0, 0, 0, t) \\ &\iff (x, y, z, t) = x(1, 1, 1, 0) + t(0, 0, 0, 1) \\ &\iff (x, y, z, t) \in \mathrm{vect}\,((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1)) \end{aligned}$$

   On en déduit que $\mathrm{F} = \mathrm{vect}\,((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$: la famille $((1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1))$ engendre F.
   Par ailleurs, elle est libre. Donc,

$$\mathcal{B} = ((1,1,1,0),(0,0,0,1)) \text{ est une base de F.}$$

2. Soit $(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}
(x,y,z,t) \in \mathrm{G} &\iff \begin{cases} x+y=0 \\ z-t=0 \\ x-y+3z+5t=0 \end{cases} \iff \begin{cases} y=-x \\ t=z \\ 2x+8t=0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} y=-x \\ t=z \\ x=-4t \end{cases} \iff \begin{cases} y=4t \\ z=t \\ x=-4t \end{cases} \\
&\iff (x,y,z,t) = (-4t,4t,t,t) \iff (x,y,z,t) = t(-4,4,1,1) \\
&\iff (x,y,z,t) \in \operatorname{vect}((-4,4,1,1))
\end{aligned}$$

On en déduit que $\mathrm{G} = \operatorname{vect}((-4,4,1,1))$: la famille $((-4,4,1,1))$ engendre G. par ailleurs elle est libre. Donc

$$\mathcal{B}' = ((-4,4,1,1)) \text{ est une base de G.}$$

3. $\mathcal{B}$ est libre. Si on lui adjoint un vecteur non combinaison linéaire de ses vecteurs, la famille obtenue sera encore libre.
   Par exemple, $((1,1,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0))$ est libre.
   De même, la famille $((1,1,1,0),(0,0,0,1),(0,0,1,0),(0,1,0,0))$ est libre.
   Comme elle compte 4 vecteurs en dimension 4, elle est génératrice.

$$\text{Finalement, } (\underbrace{(1,1,1,0),(0,0,0,1)}_{\mathcal{B}},(0,0,1,0),(0,1,0,0)) \text{ est une base de } \mathbb{R}^4.$$

Partie D : Dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on considère les matrices élémentaires $\mathrm{E}_{i,j}$ et $\mathrm{E}_{k,\ell}$.

En notant $\mathrm{E}_{i,j} = (a_{p,q})$ et $\mathrm{E}_{k,\ell} = (b_{p,q})$, on a $a_{p,q} = \delta_{p,i}\delta_{q,j}$ et $b_{p,q} = \delta_{p,k}\delta_{q,\ell}$.

Notons $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = (c_{p,q})$. On a alors $c_{p,q} = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} a_{p,r}b_{r,q} = \sum_{r=1}^{n} \delta_{p,i}\delta_{r,j}\delta_{r,k}\delta_{q,\ell}$.

— Si $j \neq k$, alors on a toujours $\delta_{r,j}\delta_{r,k} = 0$ (soit parce que $r \neq j$, soit parce que $r \neq k$).
Et donc $\forall p,q, \quad c_{p,q} = 0$, i.e. $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = 0_n$.

— Si $j = k$, alors $c_{p,q} = \displaystyle\sum_{r=1}^{n} \delta_{p,i}\delta_{r,j}\delta_{r,k}\delta_{q,\ell} = \delta_{p,i}\delta_{q,\ell}$. En effet, tous les termes de la somme sont nuls, sauf celui obtenu pour $r = j = k$ qui vaut $\delta_{p,i} \times 1 \times 1 \times \delta_{q,\ell}$.
Et donc $\forall p,q, \quad c_{p,q} = \delta_{p,i}\delta_{q,\ell}$, i.e. $\mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \mathrm{E}_{i,\ell}$.

$$\text{Bilan : } \mathrm{E}_{i,j}\mathrm{E}_{k,\ell} = \delta_{j,k}\mathrm{E}_{i,\ell}.$$