Projecteurs et Symétries

Exercice 1 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.

Soient $\mathrm{F} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, y = z\right\}$ et $\mathrm{G} = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, x - y = 0 \text{ et } z - 2y = 0\right\}$.

1 ① Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

② Montrer que $\mathrm{F} \oplus \mathrm{G} = \mathbb{R}^3$.

2 Soit p le projecteur sur F parallèlement à G.
Soit $u = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Calculer $p(u)$ en fonction de x, y, z.

3 Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ définie par $q : (x,y,z) \mapsto (x+y-z, y, y)$.

① Montrer que q est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

② Déterminer le noyau de q.

③ Montrer que $\ker q$ et G sont en somme directe.

④ Montrer que $\mathrm{Im}\ q = \mathrm{F}$.

⑤ En déduire que $p \circ q = q$ et $q \circ p = p$.

4 On pose $r = p + q$.

① r est-il un projecteur ?

② Pour $n \geqslant 2$, calculer r^n en fonction de r.

5 On note I l'application identité de $\mathbb{R}^3$. Montrer que :

① $\mathrm{Im}\ (r - 2\mathrm{I}) \subset \ker r$;

② $\mathrm{Im}\ (r) \subset \ker(r - 2\mathrm{I})$.

6 ① Écrire I comme combinaison linéaire de r et $(r - 2\mathrm{I})$.

② Montrer que $\mathbb{R}^3 = \ker r \oplus \ker(r - 2\mathrm{I})$.

③ Donner l'expression du projecteur h sur $\ker r$ parallèlement à $\ker(r - 2\mathrm{I})$.

Exercice 2 (La transposition est-elle une symétrie ?) :

Soit $\mathrm{E} = \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\phi : \begin{array}{ccc} \mathrm{E} & \longmapsto & \mathrm{E} \\ \mathrm{M} & & {}^t\mathrm{M} \end{array}$

1 ϕ est-elle linéaire ? A-t-on $\phi \circ \phi = \mathrm{Id}_{\mathrm{E}}$?

2 Déterminer $\ker(\phi - \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$ et $\ker(\phi + \mathrm{Id}_{\mathrm{E}})$.

3 ϕ est-elle une symétrie ? Si oui, en préciser les éléments.

4 Quelle conclusion donner ?