Projecteurs et Symétries

Exercice 1 :

1 ① Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{F} &\iff y=z\\ &\iff (x,y,z)=(x,y,y)\\ &\iff (x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,1)\\ &\iff (x,y,z)\in \operatorname{vect}(\{(1,0,0),(0,1,1)\})\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{F}=\operatorname{vect}(\{(1,0,0),(0,1,1)\})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}(x,y,z)\in \mathrm{G} &\iff \begin{cases}x-y=0\\ z-2y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=y\\ z=2y\end{cases}\\ &\iff (x,y,z)=(y,y,2y)\\ &\iff (x,y,z)=y(1,1,2)\\ &\iff (x,y,z)\in \operatorname{vect}(\{(1,1,2)\})\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{G}=\operatorname{vect}(\{(1,1,2)\})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

② — Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

$$(x,y,z)\in \mathrm{F}\cap\mathrm{G} \iff \begin{cases}y=z\\ x-y=0\\ z-2y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=0\\ y=0\\ z=0\end{cases} \iff (x,y,z)=(0,0,0).$$

Donc F et G sont en somme directe.

— Soit $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$.

ANALYSE : Supposons que $(a,b,c)\in \mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

On peut écrire $(a,b,c)=(x,y,y)+(\lambda,\lambda,2\lambda)$. On a $\begin{cases}x+\lambda=a\\ y+\lambda=b\\ y+2\lambda=c\end{cases}$ donc $\begin{cases}x=a+b-c\\ y=2b-c\\ \lambda=-b+c\end{cases}$.

SYNTHESE : On a

— $(a,b,c)=(a+b-c,2b-c,2b-c)+(c-b,c-b,2c-2b)$

— $(a+b-c,2b-c,2b-c)\in\mathrm{F}$

— $(c-b,c-b,2c-2b)\in\mathrm{G}$.

On en déduit que $(a,b,c)\in\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

On a donc démontré que $\mathbb{R}^3\subset\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}$.

L'autre inclusion étant immédiate, on en déduit que $\mathrm{F}\oplus\mathrm{G}=\mathbb{R}^3$.

2 Soit $u=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$.

D'après la décomposition ci-dessus, $p(u)=(x+y-z,2y-z,2y-z)$.

3 Soit q l'application de $\mathbb{R}^3$ définie par $q:(x,y,z)\mapsto(x+y-z,y,y)$.

① — $\forall (x,y,z),(x',y',z')\in\mathbb{R}^3,\forall\lambda,\lambda'\in\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}q(\lambda(x,y,z)+\lambda'(x',y',z')) &= q((\lambda x+\lambda'x',\lambda y+\lambda'y',\lambda z+\lambda'z'))\\ &=(\lambda x+\lambda'x'+\lambda y+\lambda'y'-\lambda z-\lambda'z',\lambda y+\lambda'y',\lambda y+\lambda'y')\\ &=\lambda(x+y-z,y,y)+\lambda'(x'+y'-z',y',y')\\ &=\lambda q((x,y,z))+\lambda' q((x',y',z'))\end{aligned}$$

Donc $q\in\mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$.

— $\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad q(q((x,y,z)))=q((x+y-z,y,y))=(x+y-z,y,y)=q((x,y,z))$

Donc $q\circ q=q$.

On en déduit que q est un projecteur de $\mathbb{R}^3$.

②

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad (x,y,z)\in\ker q &\iff q((x,y,z))=0_{\mathbb{R}^3}\\ &\iff (x+y-z,y,y)=(0,0,0)\\ &\iff \begin{cases}x+y-z=0\\ y=0\end{cases}\\ &\iff \begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}\\ &(x,y,z)=(x,0,x)\\ &(x,y,z)\in\mathbb{R}(1,0,1)\end{aligned}$$

$$\ker q=\mathbb{R}(1,0,1)$$

③ Soit $(x,y,z)\in\mathrm{G}\cap\ker q$. On a donc $\begin{cases}x=z\\ y=0\end{cases}$ et $\begin{cases}x=y\\ z=2y\end{cases}$ et finalement $(x,y,z)=(0,0,0)$.

D'où $\mathrm{G}\cap\ker q\subset\{(0,0,0)\}$. L'autre inclusion étant immédiate, on a $\mathrm{G}\cap\ker q=\{(0,0,0)\}$.

Donc $\ker q$ et G sont en somme directe.

④

$$\begin{aligned}\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad (x,y,z)\in\operatorname{Im} q &\iff \exists(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3, q((x_0,y_0,z_0))=(x,y,z)\\ &\iff \exists(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3,(x_0+y_0-z_0,y_0,y_0)=(x,y,z)\\ &\iff \exists(x_0,y_0,z_0)\in\mathbb{R}^3,\begin{cases}x_0+y_0-z_0=x\\ y_0=y\\ y_0=z\end{cases}\\ &\iff y=z\\ &\iff (x,y,z)\in\mathrm{F}\end{aligned}$$

$$\operatorname{Im} q=\mathrm{F}$$

⑤ — $p\circ q$ et q ont le même ensemble de départ $\mathbb{R}^3$;

— $p\circ q$ et q ont le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^3$;

— Soit $u\in\mathbb{R}^3$. $q(u)\in\operatorname{Im} q$ d'où $q(u)\in\mathrm{F}$.

Comme p est un projecteur sur F, on a $p(q(u))=q(u)$.

D'où $p\circ q=q$.

De même,

— $q \circ p$ et p ont le même ensemble de départ $\mathbb{R}^3$;

— $q \circ p$ et p ont le même ensemble d'arrivée $\mathbb{R}^3$;

— Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On a $p(u) \in \text{Im } p = \text{F}$.
Comme q est un projecteur sur F, on a $q(p(u)) = p(u)$.

D'où $q \circ p = p$.

4 ① r est bien linéaire (comme somme de deux applications linéaires).
Mais

$$\begin{aligned} r \circ r &= (p+q) \circ (p+q) \\ &= p \circ (p+q) + q \circ (p+q) \\ &= p \circ p + p \circ q + q \circ p + q \circ q \text{ car } p, q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3) \\ &= p + q + p + q \text{ car } p, q \text{ sont des projecteurs} \\ &= 2r \end{aligned}$$

On a par exemple $r((1,0,0)) = (2,0,0)$ et $r \circ r((1,0,0)) = r((2,0,0)) = (4,0,0) \neq r((1,0,0))$.
Donc $r \circ r \neq r$ donc r n'est pas un projecteur.
N.B. Parfois, $2r = r$, et ce n'est pas donc parce que $r \circ r = 2r$ que $r \circ r \neq r$... D'où la nécessité du contre-exemple.

② Par récurrence immédiate, $\forall n \geqslant 2, \quad r^n = 2^{n-1} r$.

5 ① Montrons que $\text{Im } (r - 2\text{I}) \subset \ker r$.
Soit $u \in \text{Im } (r - 2\text{I})$. On peut donc écrire $u = (r - 2\text{I})(u_0) = r(u_0) - 2u_0$.
Donc $r(u) = r(r(u_0) - 2u_0) = r^2(u_0) - 2r(u_0) = 2r(u_0) - 2r(u_0) = 0_{\mathbb{R}^3}$ car r est linéaire.

② Montrons que $\text{Im } (r) \subset \ker(r - 2\text{I})$.
Soit $u \in \text{Im } (r)$. On peut donc écrire $u = r(u_0)$.
Donc $(r-2\text{I})(u) = r(u) - 2u = r(r(u_0)) - 2r(u_0) = r^2(u_0) - 2r(u_0) = 2r(u_0) - 2r(u_0) = 0_{\mathbb{R}^3}$.

6 ① $\text{I} = \dfrac{1}{2} r - \dfrac{1}{2}(r - 2\text{I})$.

② — Soit $u \in \ker r \cap \ker(r - 2\text{I})$. On a $\begin{cases} r(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ (r - 2\text{I})(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \end{cases}$, i.e. $\begin{cases} r(u) = 0_{\mathbb{R}^3} \\ r(u) = 2u \end{cases}$.

On en déduit que $u = 0_{\mathbb{R}^3}$.
D'où $\ker r \cap \ker(r - 2\text{I}) \subset \{0_{\mathbb{R}^3}\}$.
L'autre inclusion étant immédiate, $\ker r \cap \ker(r - 2\text{I}) = \{0_{\mathbb{R}^3}\}$: $\ker r$ et $\ker(r - 2\text{I})$ sont en somme directe.

— On a $\ker r \oplus \ker(r - 2\text{I}) \subset \mathbb{R}^3$.
Soit $u \in \mathbb{R}^3$. On peut écrire $u = \text{I}(u) = \dfrac{1}{2} r(u) - \dfrac{1}{2}(r - 2\text{I})(u) = r\left(\dfrac{1}{2}u\right) + (r - 2\text{I})\left(-\dfrac{1}{2}u\right)$.

Or $\begin{cases} r\left(\dfrac{1}{2}u\right) \in \text{Im } r \subset \ker(r - 2\text{I}) \\ (r - 2\text{I})\left(-\dfrac{1}{2}u\right) \in \text{Im } (r - 2\text{I}) \subset \ker r \end{cases}$.

Donc $u \in \ker r \oplus \ker(r - 2\text{I})$.

On en déduit que $\mathbb{R}^3 = \ker r \oplus \ker(r - 2\text{I})$.

③ Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

La décomposition de u sur $\ker r \oplus \ker(r - 2\text{I})$ est $u = (r - 2\text{I})\left(-\dfrac{1}{2}u\right) + r\left(\dfrac{1}{2}u\right)$.

Par définition de h, on a

$$\begin{aligned} h(u) &= (r - 2\text{I})\left(-\frac{1}{2}u\right) \\ &= -\frac{1}{2}(p(u) + q(u) - 2u) \\ &= -\frac{1}{2}((x + y - z, 2y - z, 2y - z) + (x + y - z, y, y) - (2x, 2y, 2z)) \\ &= \left(-y + z, \frac{y - z}{2}, \frac{3z - 3y}{2}\right) \end{aligned}$$

$$h((x, y, z)) = \left(-y + z, \frac{y - z}{2}, \frac{3z - 3y}{2}\right).$$

Exercice 2 :

1 D'après le cours, $\forall \text{A}, \text{B} \in \text{E}, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \phi(\lambda\text{A} + \text{B}) = {}^t(\lambda\text{A} + \text{B}) = \lambda\, {}^t\text{A} + {}^t\text{B} = \phi(\text{A}) + \phi(\text{B})$.
Donc $\phi \in \mathcal{L}(\text{E})$.
Toujours d'après le cours $\forall \text{A} \in \text{E}, \quad \phi \circ \phi(\text{A}) = {}^t({}^t\text{A}) = \text{A} = \text{Id}_\text{E}(\text{A})$. Donc $\phi \circ \phi = \text{Id}_\text{E}$.

2 — $\text{M} \in \ker(\phi - \text{Id}_\text{E}) \iff (\phi - \text{Id}_\text{E})(\text{M}) = 0_n \iff \phi(\text{M}) - \text{M} = 0_n \iff {}^t\text{M} = \text{M} \iff \text{M}$ est symétrique.

— $\text{M} \in \ker(\phi + \text{Id}_\text{E}) \iff (\phi + \text{Id}_\text{E})(\text{M}) = 0_n \iff \phi(\text{M}) + \text{M} = 0_n \iff {}^t\text{M} = -\text{M} \iff \text{M}$ est antisymétrique.

$\ker(\phi - \text{Id}_\text{E}) = \text{S}_n(\mathbb{K})$ et $\ker(\phi + \text{Id}_\text{E}) = \text{A}_n(\mathbb{K})$.

3 Comme $\phi \in \mathcal{L}(\text{E})$ et $\phi \circ \phi = \text{Id}_\text{E}$, on peut en déduire que ϕ est une symétrie.
ϕ est une symétrie par rapport à $\text{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\text{A}_n(\mathbb{K})$.
NB : La décomposition de M sur $\text{S}_n(\mathbb{K}) \oplus \text{A}_n(\mathbb{K})$ est $\text{M} = \dfrac{1}{2}(\text{M} + {}^t\text{M}) + \dfrac{1}{2}(\text{M} - {}^t\text{M})$.
On a bien ${}^t\text{M} = \dfrac{1}{2}(\text{M} + {}^t\text{M}) - \dfrac{1}{2}(\text{M} - {}^t\text{M})$, écriture sur laquelle on reconnaît bien l'expression d'une symétrie.

4 De manière générale (dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$), la transposition n'est pas un endomorphisme, puisque la transposée d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est une matrice de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Ce n'est donc pas une symétrie.
Toutefois, dans le cas particulier où $p = n$ (pour des matrices carrées) on vient de voir que la transposition était une symétrie.