Intégration

La fonction F est définie sur $]0,+\infty[$ par $\mathrm{F}(x)=\displaystyle\int_1^x \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

On note Γ la courbe représentative de F.

1. (a) Justifier que F est bien définie sur $]0,+\infty[$.
   (b) Étudier le signe de F sur $]0,+\infty[$.
   (c) Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$, et même de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.
   Calculer $\mathrm{F}'(x)$ pour tout $x>0$.
2. Établir que :
$$\forall x>0,\quad \mathrm{F}\left(\frac{1}{x}\right)=\mathrm{F}(x).$$
3. (a) On note ϕ la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $\phi(x)=\dfrac{\arctan x}{x}$.
   Montrer que ϕ est prolongeable par continuité en 0.
   (b) Montrer que :
$$\forall x>0,\quad \mathrm{F}(x)=(\arctan x)\ln x-\int_1^x \phi(t)\,\mathrm{d}t.$$
   (c) En déduire que F est prolongeable par continuité en 0 (on continuera de noter F le prolongement), puis la limite de F en $+\infty$.
   (d) Monter que F n'est pas dérivable en 0.
   Que peut-on néanmoins déduire pour Γ ?
4. Dans cette question, on cherche une valeur approchée de $\mathrm{F}(0)$.
   (a) Pour tout entier $k\in\mathbb{N}$ et $x>0$, calculer $\mathrm{I}_k(x)=\displaystyle\int_1^x t^k\ln t\,\mathrm{d}t$.
   (b) Montrer que pour tout entier $n\in\mathbb{N}$ et tout réel $x>0$, on a
$$\frac{1}{1+x^2}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{2k}+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+2}}{1+x^2}.$$
   (c) En déduire, pour tout $n\in\mathbb{N}$ et tout réel $x>0$
$$\left|\mathrm{F}(x)-\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\mathrm{I}_{2k}(x)\right|\leqslant \mathrm{I}_{2n+2}(x).$$
   (d) On pose pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}$. Montrer que
$$|\mathrm{F}(0)-u_n|\leqslant\frac{1}{(2n+3)^2}.$$
   (e) Déduire de ce qui précède un entier n tel que u_n soit une valeur approchée à 10^{-2} près de $\mathrm{F}(0)$. Expliciter la valeur approchée obtenue.
5. Tracer Γ, en tenant compte des informations démontrées dans l'énoncé.
   On donne $\mathrm{F}(0)\simeq 0,92$.