Matrices et Applications linéaires

Exercice 1 : On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^3$.

On note : $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$, et $\mathcal{E}$ la base (e_1, e_2, e_3).

On considère la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Partie I

1 Montrer que A est inversible, et calculer A^{-1}.

On fera apparaître sur la copie la méthode utilisée et les calculs intermédiaires.

2 ① Calculer A^2 et A^3.

② Montrer qu'on peut écrire :
$A = \lambda_1 A + \mu_1 I_3$, $\quad A^2 = \lambda_2 A + \mu_2 I_3$ et $\quad A^3 = \lambda_3 A + \mu_3 I_3$,
où $\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, \lambda_3, \mu_3$ sont des réels que l'on précisera.

3 On considère la suite $(u_n)_{n \geqslant 1}$ définie par :
$u_1 = u_2 = 1$ et $\forall n \geqslant 1, \quad u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$.

① Démontrer que $\forall n \geqslant 2, \quad A^n = u_n\, A + 2u_{n-1}\, I_3$.

② Déterminer l'expression explicite de u_n.

③ En déduire l'expression de A^n pour tout n entier naturel non nul.

Partie II

On note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à A, i.e. $A = \text{mat}_{\mathcal{E}}(f)$. I$d$ désigne l'identité de $\mathbb{R}^3$, et on pose $F_1 = \ker(f + \mathrm{I}d)$ et $F_2 = \ker(f - 2\mathrm{I}d)$.

1 ① Rappeler pourquoi F_1 et F_2 sont des sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

② Déterminer F_1 et F_2, ainsi que leur nature géométrique.
Donner une base $\mathcal{B}_1$ de F_1 et une base $\mathcal{B}_2$ de F_2.

On choisira des vecteurs dont la première composante est 1, et dont une composante est si possible nulle.

③ Montrer que si l'on complète la base $\mathcal{B}_1$ par la base $\mathcal{B}_2$, on obtient une base $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$.

④ Montrer que : $\mathbb{R}^3 = F_1 \oplus F_2$

2 ① Déterminer la matrice D de f dans $\mathcal{B}$.

② Déterminer la matrice de passage P de la base $\mathcal{E}$ vers la base $\mathcal{B}$.

③ Rappeler pourquoi P est inversible, et calculer son inverse P^{-1}.

④ Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $A^n = PD^nP^{-1}$.

⑤ En déduire la valeur de A^n en fonction de n.
Comparer avec le résultat de la partie I.