Écriture matricielle

On se place dans $\mathbb{R}^3$, muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On considère l'application linéaire

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longmapsto & \mathbb{R}^3 \\ (x;\ y;\ z) & & (x+2y;\ -y;\ -2x-2y-z) \end{array}.$$

1. Compléter :
   (a) $f(e_1) = e_1 - 2e_2$.

   (b) $\text{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

   (c) On pose $e'_1 = e_1 - e_3$.

   $$f(e'_1) = f(e_1) - f(e_3) = e_1 - 2e_3 + e_3 = e_1 - e_3 = e'_1.$$

   On dit que e'_3 est invariant .

   (d) On pose $e'_2 = e_1 - e_2 - e_3$, $e'_3 = -e_1 + e_2 + 2e_3$ et on note $\mathcal{B} = (e'_1, e'_2, e'_3)$

   $$\text{Mat}_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

2. Que représente l'application f dans $\mathbb{R}^3$. On donnera ses éléments caractéristiques sous la forme d'un vect $(\ldots)$.
   f est une une symétrie par rapport à vect $(e'_1) =$ vect $(e_1 - e_3)$ et parallèlement à vect $(e'_2, e'_3) =$ vect $(e_1 - e_2 - e_3, -e_1 + e_2 + 2e_3)$

3. Redémontrer votre résultat précédent de manière directe.
   f est linéaire et $\forall (x;\ y;\ z) \in \mathbb{R}^3$, on a :

   $$f\left(f\left(x;\ y;\ z\right)\right) = f\begin{pmatrix} x+2y \\ -y \\ -2x-2y-z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+2y+2(-y) \\ -(-y) \\ -2(x+2y)-2(-y)-(-2x-2y-z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

   Donc, $f \circ f = \text{Id}_E$ et f est une symétrie.